



## Løsningsforslag til eksamen i FY3404 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Tirsdag 30. november 2004

Dette løsningsforslaget er på 7 sider.

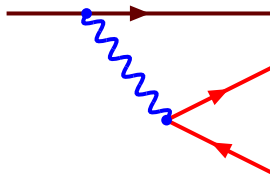
### Oppgave 1. Prosesser i *QED*

Tegn, i de tilfeller dette er mulig i kvante-elektrodynamikk (*QED*), Feynman diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene nedenfor. For noen tilfeller eksisterer det Feynman diagram, men prosessen er likevel ikke mulig i vakuum. Angi slike tilfeller, og forklar kort hva som gjør prosessen umulig.

a)  $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$

Umulig prosess i QED. Bryter bevaring av myon- og elektron-tall. Opptrer trolig i virkeligheten, men med svært liten sannsynlighet.

b)  $\mu^- \rightarrow \mu^- e^+ e^-$

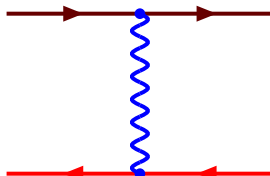


Likevel en umulig prosess pga konservering av firer-impuls.

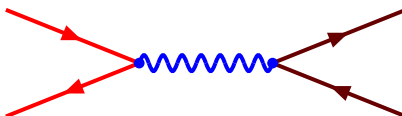
c)  $e^+ \mu^- \rightarrow e^- \mu^+$

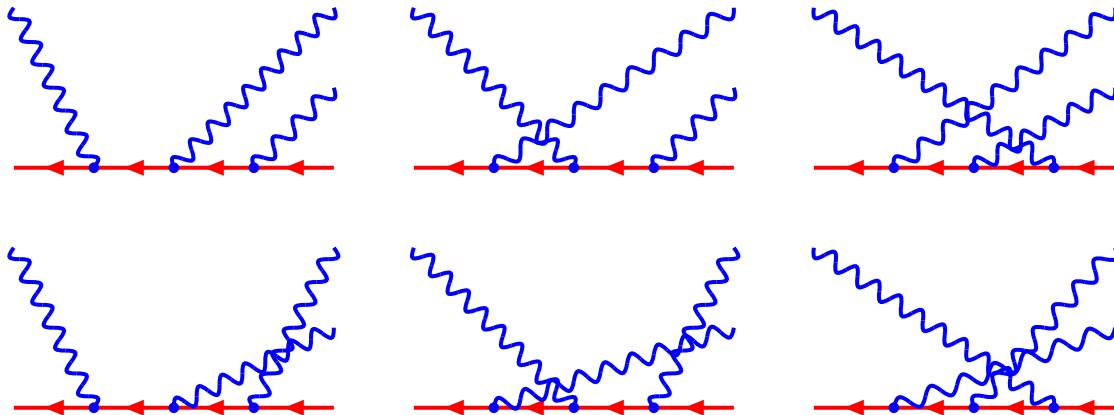
Umulig prosess i QED. Bryter bevaring av myon- og elektron-tall. Opptrer trolig i virkeligheten, men med svært svært liten sannsynlighet.

d)  $e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^-$

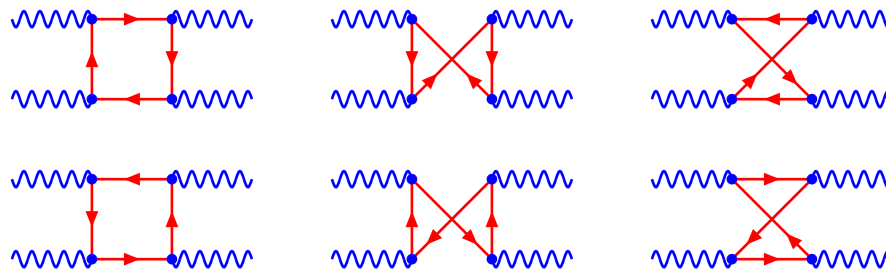


e)  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

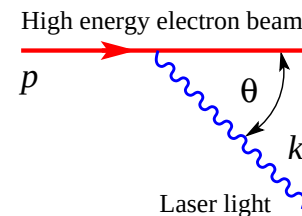


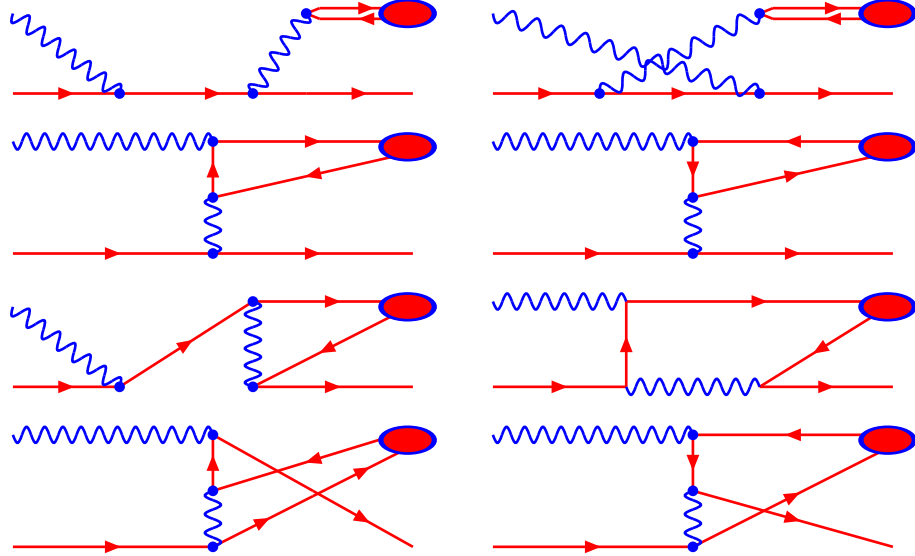
f)  $e^+\gamma \rightarrow e^+\gamma$ g)  $e^+\gamma \rightarrow e^+\gamma\gamma$ h)  $\gamma\gamma \rightarrow \gamma$ 

Men bidragene fra disse to amplitudene kansellerer eksakt i  $QED$  (Furry's teorem) som en konsekvens av invarians under ladningskonjugasjon. Uansett ville prosessen vært umulig pga konservering av firer-impuls.

i)  $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ 

j) Positronium er et bundet system av et elektron og et positron (med bindingsenergi 6.8 eV). Det har vært foreslått å produsere positronium ved å rette en intens laserstråle mot en høyenergetisk elektronstråle. Dette vil altså føre til kollisjoner med  $e^-\gamma$  i starttilstanden. Hvilke Feynman diagrammer vil da svare til produksjon av positronium (og eventuelt andre partikler)?





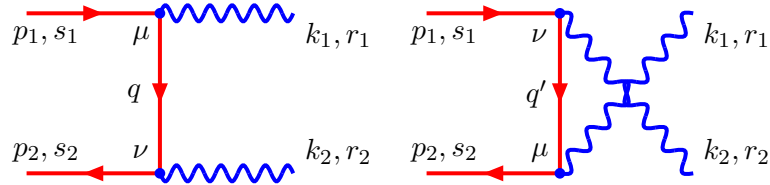
Det viktigste her er å innse at vi må få produsert et (virtuelt) elektron-positron par. Det er ialt 4 laveste ordens diagrammer som bidrar til dette. Ett av de to elektronene vil så binde til positronet (ved utveksling av fotoner) og danne positronium, her symbolisert ved . Det blir derfor ialt  $4 \times 2$  laveste ordens bidrag til amplituden (selv om man intuitivt forventer at noen av amplitudene vil være små).

### Oppgave 2. To-foton annihilasjon av et elektron-positron par

I denne oppgaven skal du se på annihilasjon av et elektron-positron par,  $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$ . Betrakt prosessen fra massesenter systemet, og regn med naturlige enheter  $\hbar = c = 1$  der dette er enklest.

- a) Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen. Påfør diagrammene alle nødvendige impulser og indekser.

Anta at det innkommende elektronet (resp. positronet) har kvantetall  $p_1, s_1$  (resp.  $p_2, s_2$ ), og at de utgående fotonene har kvantetall  $k_1, r_1$  og  $k_2, r_2$ . Innfør videre  $q = p_1 - k_1$  og  $q' = p_1 - k_2$ .



*To-foton annihilasjon av et elektron-positron par*

- b) Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske bidragene til spredningsamplituden  $\mathcal{M}_{fi}$ .

Vi har  $\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{fi}^{(a)} + \mathcal{M}_{fi}^{(b)}$ , med

$$-i\mathcal{M}_{fi}^{(a)} = \frac{i(e)^2}{q^2 - m_e^2} [\bar{v}(2)\gamma_\nu(\not{q} + m_e)\gamma_\mu u(1)] e^{*\mu}(1) e^{*\nu}(2), \quad (1)$$

$$-i\mathcal{M}_{fi}^{(b)} = \frac{i(e)^2}{q'^2 - m_e^2} [\bar{v}(2)\gamma_\mu(\not{q}' + m_e)\gamma_\nu u(1)] e^{*\mu}(1) e^{*\nu}(2), \quad (2)$$

der  $u(1) \equiv u_{s_1}(p_1)$ ,  $\bar{v}(2) \equiv \bar{v}_{s_2}(p_2)$ ,  $e^{*\mu}(1) \equiv e_{r_1}^{*\mu}(k_1)$ , og  $e^{*\mu}(2) \equiv e_{r_2}^{*\mu}(k_2)$ .

- c) Bruk dimensjonsanalyse og kvalitativ informasjon fra Feynman diagrammene til å anslå størrelsesorden til det totale spredningstverrsnittet i det spesielle tilfellet at elektronet har energi  $E = 2m_e$ . Dvs., bestem hvilken algebraisk kombinasjon av fysiske parametre tverrsnittet må avhenge av, og regn ut størrelsen på denne kombinasjonen i vanlige SI-enheter.

**Oppgitt:**  $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$

$\hbar = 1.054\,572\,66 \times 10^{-34} \text{ J s}$ ,  $6.582\,122\,0 \times 10^{-16} \text{ eV s}$ ,  $c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$ ,  $e = 1.602\,177\,33 \times 10^{-19} \text{ C}$ ,  $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137.035\,9895$ .

Spredningsamplituden er proporsjonal med  $e^2$ , dvs. at spredningstverrsnittet er proporsjonalt med  $e^4$  eller  $\alpha^2$ . Tverrsnittet skal ha dimensjon *lengde*<sup>2</sup>; den eneste parameteren tilgjengelig for dette er  $m_e$  eller mer presist  $\lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c}$ . Altså

$$\sigma_{\text{ann}}^{(\text{tot})} \sim (\alpha\lambda_e)^2 = \left(\frac{\alpha\hbar}{m_e c}\right)^2 = (2.82 \times 10^{-15} \text{ m})^2 = 7.94 \times 10^{-30} \text{ m}^2 = 79.4 \text{ mbarn.} \quad (3)$$

Kombinasjonen  $\alpha\lambda_e$  er kjent som *den klassiske elektronradius*,  $r_e$ .

**Kommentar 1:** Her var det en stygg feil i den opprinnelige oppgaveteksten, der det var oppgitt at  $m_e = 0.511 \text{ MeV}$ . Dette kan føre til en feil på  $\{c^{-4}\} \approx 10^{-34}$  ved utregning i SI-enheter!

**Kommentar 2:** Det kan jo være interessant å sammenligne dette overslaget med det eksakte tverrsnittet, som er

$$\sigma_{\text{ann}}^{(\text{tot})} = \frac{\pi r_e^2}{\gamma + 1} \left\{ \frac{\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma^2 - 1} \log \left[ \gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1} \right] - \frac{\gamma + 3}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right\}, \quad (4)$$

der  $\gamma = E/(m_e c^2)$ . For  $E = 2m_e c^2$  finner vi derfor at  $\sigma_{\text{ann}}^{(\text{tot})} = 2.95 \dots \times r_e^2$ , dvs. ganske nær den anslåtte verdien. Men merk at  $\sigma_{\text{ann}}^{(\text{tot})} \rightarrow \infty$  når  $\gamma \rightarrow 1^+$  og  $\sigma_{\text{ann}}^{(\text{tot})} \rightarrow 0$  når  $\gamma \rightarrow \infty$ , så uansett hvilken verdi man anslår for  $\sigma_{\text{ann}}^{(\text{tot})}$  så finnes der alltid en  $\gamma$  som det passer for!

- d) Det upolariserte tverrsnittet framkommer ved at vi summerer over spinntilstandene  $(r_1, r_2)$  til de utgående fotonene, og midler over spinntilstandene  $(s_1, s_2)$  til det innkommende elektron-positron paret. Amplitudekvadratet  $\sum_{r_1 r_2 s_1 s_2} |\mathcal{M}_{fi}|^2$  kan da uttrykkes som en sum av spor over  $\gamma$ -matriser (med prefaktorer).

Finn denne summen. Du trenger foreløpig ikke å regne ut sporene.

Vi bruker kompletthetsrelasjonene,

$$\sum_{r_1 r_2} e_{r_1}^{*\mu}(k_1) e_{r_1}^{\bar{\mu}}(k_1) e_{r_2}^{*\nu}(k_2) e_{r_2}^{\bar{\nu}}(k_2) = \eta^{\mu\bar{\mu}} \eta^{\nu\bar{\nu}}, \quad (5)$$

$$\sum_{s_1} u_{s_1}(p_1) \bar{u}_{s_1}(p_1) = (\not{p}_1 + m_e), \quad \sum_{s_2} v_{s_2}(p_2) \bar{v}_{s_2}(p_2) = (\not{p}_2 - m_e), \quad (6)$$

og finner

$$\frac{1}{4} \sum_{r_1 r_2 s_1 s_2} \left| \mathcal{M}_{fi}^{(a)} + \mathcal{M}_{fi}^{(b)} \right|^2 = \frac{e^4}{(q^2 - m_e^2)^2} T^{aa} + \frac{e^4}{(q^2 - m_e^2)(q'^2 - m_e^2)} (T^{ab} + T^{ba}) + \frac{e^4}{(q'^2 - m_e^2)^2} T^{bb}, \quad (7)$$

der

$$\begin{aligned}
T^{aa} &= \frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2} [\bar{v}(2) \gamma_\nu (\not{q} + m_e) \gamma_\mu u(1)] [\bar{u}(1) \gamma^\mu (\not{q} + m_e) \gamma^\nu v(2)] \\
&= \frac{1}{4} \text{Tr} [\gamma_\nu (\not{q} + m_e) \gamma_\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\mu (\not{q} + m_e) \gamma^\nu (\not{p}_2 - m_e)] , \\
T^{ab} &= \frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2} [\bar{v}(2) \gamma_\nu (\not{q} + m_e) \gamma_\mu u(1)] [\bar{u}(1) \gamma^\nu (\not{q}' + m_e) \gamma^\mu v(2)] \\
&= \frac{1}{4} \text{Tr} [\gamma_\nu (\not{q} + m_e) \gamma_\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu (\not{q}' + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_2 - m_e)] , \\
T^{ba} &= \frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2} [\bar{v}(2) \gamma_\mu (\not{q}' + m_e) \gamma_\nu u(1)] [\bar{u}(1) \gamma^\mu (\not{q} + m_e) \gamma^\nu v(2)] \\
&= \frac{1}{4} \text{Tr} [\gamma_\nu (\not{q}' + m_e) \gamma_\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\mu (\not{q} + m_e) \gamma^\nu (\not{p}_2 - m_e)] , \\
T^{bb} &= \frac{1}{4} \sum_{s_1 s_2} [\bar{v}(2) \gamma_\mu (\not{q}' + m_e) \gamma_\nu u(1)] [\bar{u}(1) \gamma^\nu (\not{q}' + m_e) \gamma^\mu v(2)] \\
&= \frac{1}{4} \text{Tr} [\gamma_\mu (\not{q}' + m_e) \gamma_\nu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu (\not{q}' + m_e) \gamma^\mu (\not{p}_2 - m_e)] .
\end{aligned}$$

Faktoren  $\frac{1}{4}$  skyldes at vi skal midle over spinnet til elektron-positron paret (fire ortogonale muligheter).

- e) Anta nå at energien  $E$  til det innkommende elektronet er mye større enn dets hvileenergi,  $E \gg m_e$ , slik at man kan sette  $m_e = 0$  i alle uttrykk. Finn i dette tilfellet eksplisitte uttrykk for følgende skalarprodukt mellom firervektorer.

Uttrykk svaret ved energien  $E$  til det innkommende elektronet og vinkelen  $\vartheta$  mellom det innkommende elektronet og et av de produserte fotonene.

Vi velger koordinatsystem slik at

$$\begin{aligned}
p_1 &= E (1, 0, 0, 1) , \\
p_2 &= E (1, 0, 0, -1) , \\
k_1 &= E (1, \sin \vartheta, 0, \cos \vartheta) , \\
k_2 &= E (1, -\sin \vartheta, 0, -\cos \vartheta) ,
\end{aligned}$$

og finner

- (i)  $p_1 p_2 = 2E^2$ ,
- (ii)  $p_1 q = p_1^2 - p_1 k_1 = -E^2 (1 - \cos \vartheta)$ ,
- (iii)  $p_2 q = p_1 p_2 - p_2 k_1 = E^2 (1 - \cos \vartheta)$ ,
- (iv)  $p_1 q' = p_1^2 - p_1 k_2 = -E^2 (1 + \cos \vartheta)$ ,
- (v)  $p_2 q' = p_1 p_2 - p_2 k_2 = E^2 (1 + \cos \vartheta)$ ,
- (vi)  $q^2 = p_1^2 - 2p_1 k_1 = -2E^2 (1 - \cos \vartheta)$ ,
- (vii)  $q'^2 = p_1^2 - 2p_1 k_2 = -2E^2 (1 + \cos \vartheta)$ ,
- (viii)  $qq' = p_1^2 - p_1 k_2 - p_1 k_1 + k_1 k_2 = 0$ .

- f) Finn i grensetilfellet fra underpunkt e) eksplisitte uttrykk for alle sporene som inngår i  $\sum_{r_1 r_2 s_1 s_2} |\mathcal{M}_{fi}|^2$  fra forrige punkt.

Vi setter  $m_e = 0$  i alle sporuttrykk og finner

$$\begin{aligned} T^{aa} &= \frac{1}{4} \text{Tr} [\gamma_\nu \not{e} \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma^\mu \not{e} \gamma^\nu \not{p}_2] = 8(p_1 q)(p_2 q) - 4(p_1 p_2)q^2 = 8E^4 (1 - \cos^2 \vartheta), \\ T^{ab} &= \frac{1}{4} \text{Tr} [\gamma_\nu \not{e} \gamma_\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{e}' \gamma^\mu \not{p}_2] = -8(p_1 p_2)(q q') = 0, \\ T^{ba} &= \frac{1}{4} \text{Tr} [\gamma_\mu \not{e}' \gamma_\nu \not{p}_1 \gamma^\mu \not{e} \gamma^\nu \not{p}_2] = -8(p_1 p_2)(q q') = 0, \\ T^{bb} &= \frac{1}{4} \text{Tr} [\gamma_\mu \not{e}' \gamma_\nu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{e}' \gamma^\mu \not{p}_2] = 8(p_1 q')(p_2 q') - 4(p_1 p_2)q'^2 = 8E^4 (1 - \cos^2 \vartheta). \end{aligned}$$

- g) Finn i grensetilfellet fra underpunkt e) eksplisitt uttrykk for det differensielle tverrsnittet  $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{ann}}$ . Uttrykk svaret ved energien  $E$  og vinkelen  $\vartheta$ .

Vi setter resultatene over inn i ligning (7) og får

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} \equiv \frac{1}{4} \sum_{r_1 r_2 s_1 s_2} |\mathcal{M}_{fi}^{(a)} + \mathcal{M}_{fi}^{(b)}|^2 = 2e^4 \left( \frac{1 + \cos \vartheta}{1 - \cos \vartheta} + \frac{1 - \cos \vartheta}{1 + \cos \vartheta} \right).$$

Fra den oppgitte formelen i vedlegget følger det så at

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{ann}} = \frac{1}{64\pi^2 (2E)^2} \overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} = \frac{\alpha^2}{32} \left( \frac{\hbar c}{E} \right)^2 \left( \frac{1 + \cos \vartheta}{1 - \cos \vartheta} + \frac{1 - \cos \vartheta}{1 + \cos \vartheta} \right). \quad (8)$$

Her har vi i siste likhet satt inn  $\hbar$  og  $c$  slik at uttrykket blir dimensjonsmessig korrekt i SI-enheter.

### Oppgave 3. Klein-Gordon felt i et konformt flatt rom

Dynamikken til et komplekst Klein-Gordon felt  $\varphi(x)$  i et krumt (men konformt flatt) rom er definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = e^{\lambda(x)} [\partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi], \quad (9)$$

der funksjonen  $\lambda(x)$  antas å være kjent på forhånd. Vi bruker enheter der  $\hbar = c = 1$ .

- a) Hva blir de kanonisk konjugerte impulstetthetene  $\Pi_\varphi$  og  $\Pi_{\varphi^*}$  til feltene  $\varphi$  og  $\varphi^*$ ?

$$\Pi_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = e^{\lambda(x)} \dot{\varphi}^*, \quad \Pi_{\varphi^*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = e^{\lambda(x)} \dot{\varphi}. \quad (10)$$

- b) Hva blir Hamiltontettheten  $\mathcal{H}$ ?

$$\mathcal{H} = \Pi_\varphi \dot{\varphi} + \Pi_{\varphi^*} \dot{\varphi}^* - \mathcal{L} = e^{-\lambda(x)} \Pi_{\varphi^*} \Pi_\varphi + e^{\lambda(x)} (\nabla \varphi^* \nabla \varphi + m^2 \varphi^* \varphi). \quad (11)$$

- c) Hva blir bevegelsesligningene (Euler-Lagrange ligningene) for  $\varphi$  og  $\varphi^*$ ?

Fra henholdsvis  $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi^*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*}$  og  $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}$  finner vi etter divisjon med  $e^{\lambda(x)}$

$$e^{-\lambda(x)} \partial_\mu e^{\lambda(x)} \partial^\mu \varphi(x) + m^2 \varphi(x) = 0, \quad e^{-\lambda(x)} \partial_\mu e^{\lambda(x)} \partial^\mu \varphi^*(x) + m^2 \varphi^*(x) = 0. \quad (12)$$

- d) Vis at man ved å innføre feltet  $\psi(x) = e^{\frac{1}{2}\lambda(x)}\varphi(x)$  kan transformere bevegelsesligningen til en Klein-Gordon ligning med et  $x$ -avhengig masseledd  $M^2(x)$ .

Vi setter inn  $\phi(x) = e^{-\frac{1}{2}\lambda(x)}\psi(x)$  i ligning (12) og finner

$$\begin{aligned}\partial_\mu e^\lambda \partial^\mu e^{-\frac{1}{2}\lambda} \psi &= \partial_\mu e^{\frac{1}{2}\lambda} \left( \partial^\mu \psi - \frac{1}{2}(\partial^\mu \lambda) \psi \right) \\ &= e^{\frac{1}{2}\lambda(x)} \left[ \square \psi - \frac{1}{2}(\square \lambda) \psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu \lambda)(\partial^\mu \lambda) \psi \right].\end{aligned}$$

Altså får vi

$$\square \psi(x) + M^2(x) \psi(x) = 0, \quad \text{der } M^2(x) = m^2 - \frac{1}{2}\square \lambda - \frac{1}{4}(\partial_\mu \lambda)(\partial^\mu \lambda). \quad (13)$$

- e) Vi antar nå at  $\lambda(x) = 2at$  (i et gitt koordinatsystem), og kvantiserer denne feltteorien. Hva blir i dette tilfellet utviklingen av det annenkvantiserte feltet  $\psi(x)$ , uttrykt ved kreasjons- og annihilasjonsoperatorer? Du kan anta et endelig volum med periodiske grensebetingelser.

Med  $\lambda(x) = 2at$  vil  $\psi(x)$  tilfredsstille en vanlig Klein-Gordon ligning med konstant masseparameter  $M^2 = m^2 - a^2$ . Vi kan da forvente at  $\psi$ ,  $\psi^\dagger$  vil ha en vanlig utvikling i kreasjons og annihilasjonsoperatorer

$$\psi(x) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}V}} \left[ a(\mathbf{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(\mathbf{p}) e^{ipx} \right], \quad (14)$$

$$\psi^\dagger(x) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}V}} \left[ b(\mathbf{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\mathbf{p}) e^{ipx} \right], \quad (15)$$

der  $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}$  og  $px = \omega_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ , og der  $a^\dagger(\mathbf{p})$ ,  $b^\dagger(\mathbf{p})$ ,  $a(\mathbf{p})$  og  $b(\mathbf{p})$  oppfyller de vanlige kommuteringsreglene for kreasjons- og annihilasjonsoperatorer. Vi vet fra kvantisering av det vanlige komplekse Klein-Gordon feltet at denne ekspansjonen løser feltligningen og oppfyller de vanlige til *lik-tid* kommuteringsreglene

$$\left[ \dot{\psi}^\dagger(t, \mathbf{x}), \psi(t, \mathbf{y}) \right] = \left[ \dot{\psi}(t, \mathbf{x}), \psi^\dagger(t, \mathbf{y}) \right] = -i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

med alle andre *lik-tid* kommutatorer mellom feltene og deres tidsderiverte lik null.

**Kommentar:** Merk at det oppstår en ustabilitet,  $M^2 < 0$ , hvis geometrien endrer seg for raskt, dvs. hvis  $a^2 > m^2$ .

**Kommentar til de pedantiske:** Selvfølgelig skal man også kontrollere hva som er de korrekte kanoniske konjugerte feltene til  $\psi$  og  $\psi^\dagger$ . For dette må vi starte med Lagrangetettheten uttrykte ved  $\psi$  og  $\psi^\dagger$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= e^{2at}(\partial_\mu e^{-at}\psi^*)(\partial^\mu e^{-at}\psi) - m^2\psi^*\psi \\ &= (\dot{\psi}^* - a\psi^*)(\dot{\psi} - a\psi) - \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi - m^2\psi^*\psi.\end{aligned}$$

Denne Lagrangetettheten avviker bare med en totalderivert,  $\Delta\mathcal{L} = -a\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\psi$ , fra den vanlige Lagrangetettheten for Klein-Gordon feltet. De to teoriene må derfor være ekvivalente. Dette kan vi også sjekke eksplisitt. De kanonisk konjugerte feltene blir

$$\Pi_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = \dot{\psi}^* - a\psi^*, \quad \Pi_{\psi^*} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}^*} = \dot{\psi} - a\psi.$$

Fra dette kan vi verifisere at ekspansjonene (14, 15) oppfyller de riktige *lik-tid* kommuteringsreglene. F. eks. har vi

$$[\Pi_\psi(t, \mathbf{x}), \psi(t, \mathbf{y})] = [\dot{\psi}^\dagger(t, \mathbf{x}), \psi(t, \mathbf{y})] - a[\psi^\dagger(t, \mathbf{x}), \psi(t, \mathbf{y})] = -i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (16)$$

siden  $[\psi^\dagger(t, \mathbf{x}), \psi(t, \mathbf{y})] = 0$ .