



Løsningsforslag til eksamen i
FY8307/3404/TFY18 RELATIVISTISK
KVANTEMEKANIKK
 Torsdag 13. oktober 2005

Dette løsningsforslaget er på 4 sider.

Oppgave 1.

En fri feltteori er definert ved Lagrangetettheten

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_1\partial^\mu\varphi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_2\partial^\mu\varphi_2 - \frac{1}{2}M^2\varphi_1\varphi_1 - \frac{1}{2}M^2\varphi_2\varphi_2 - \Delta^2\varphi_1\varphi_2 \\ & - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_f)\psi,\end{aligned}\tag{1}$$

der φ_1 og φ_2 er relle Klein-Gordon felter, $F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$ er den elektromagnetiske felttensoren, og ψ er et Dirac-felt.

I denne modellen er de kanonisk konjugerte impulstettheten til feltene A^0 og A^i gitt som

- | | |
|---|---------------------------------|
| A. $(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (\dot{A}^0, \dot{A}^i)$ | <input type="text"/> |
| B. $(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (-\dot{A}^0, \dot{A}^i)$ | <input type="text"/> |
| C. $(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (0, \dot{A}^i + \partial_i A^0)$ | <input checked="" type="text"/> |
| D. $(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (0, -\dot{A}^i)$ | <input type="text"/> |
| E. $(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (\dot{A}^0 + \partial_i A^i, -\dot{A}^0 - \partial_i A^0)$ | <input type="text"/> |

De leddene i $\mathcal{L}$ som avhenger av $\partial_0 A^\mu$ er

$$-\frac{1}{4}(F^{0\mu}F_{0\mu} + F^{\mu 0}F_{\mu 0}) = -\frac{1}{4}(F^{0i}F_{0i} + F^{i0}F_{i0}) = \frac{1}{2}F^{i0}F^{i0} = \frac{1}{2}(\dot{A}^i + \partial_i A^0)(\dot{A}^i + \partial_i A^0),$$

som gir at $\Pi_{A^0} = 0$, $\Pi_{A^i} = \dot{A}^i + \partial_i A^0$.

Oppgave 2.

Bruk Lagrangetettheten (1) til å skrive ned bevegelsesligningene for φ_1 og φ_2 .

Euler-Lagrange ligningene er

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi_a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a},$$

som gir

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi_1 = -M^2 \varphi_1 - \Delta^2 \varphi_2,\tag{2}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi_2 = -M^2 \varphi_2 - \Delta^2 \varphi_1.\tag{3}$$

Ved inspeksjon ser vi at ved å addere og subtrahere disse ligningene får vi

$$[\square + M^2 + \Delta^2](\varphi_1 + \varphi_2) = 0, \quad [\square + M^2 - \Delta^2](\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$$

Dette betyr at $\mathcal{L}$ beskriver to fri reelle Klein-Gordon felter, $\varphi_+ = (\varphi_1 + \varphi_2)/\sqrt{2}$ med masseledd $M^2 + \Delta^2$ og $\varphi_- = (\varphi_1 - \varphi_2)/\sqrt{2}$ med masseledd $M^2 - \Delta^2$.

Oppgave 3.

I modellen definert ved Lagrangetettheten (1) er det formelle uttrykket for vakuumforventningsverdien av energiimpulstensoren lik $\langle \Omega | T^{\mu\nu} | \Omega \rangle = \Lambda \eta^{\mu\nu}$, der

- | | | |
|----|--|-------------------------------------|
| A. | $\Lambda = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[2 p + \sqrt{p^2 + M^2 - \Delta^2} + \sqrt{p^2 + M^2 + \Delta^2} - 4\sqrt{p^2 + m_f^2} \right]$ | ☒ |
| B. | $\Lambda = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[2 p + 2\sqrt{p^2 + M^2} + 2\sqrt{p^2 + m_f^2} \right]$ | ☐ |
| C. | $\Lambda = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[2 p + 2\sqrt{p^2 + M^2} + \sqrt{p^2 + \Delta^2} - 4\sqrt{p^2 + m_f^2} \right]$ | ☐ |
| D. | $\Lambda = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[p + \sqrt{p^2 + M^2 + \Delta^2} + \sqrt{p^2 + M^2 - \Delta^2} + \sqrt{p^2 + m_f^2} \right]$ | ☐ |
| E. | $\Lambda = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[p + 2\sqrt{p^2 + M^2} + \sqrt{p^2 + \Delta^2} - \sqrt{p^2 + m_f^2} \right]$ | ☐ |

når vi bruker naturlige enheter.

Vi kan bestemme Λ fra den energitettheten $T^{00} = \Lambda \eta^{00} = \Lambda$ vi finner fra bidragene til nullpunktsenergi. Vi har et fotonfelt (bosonisk med 2 frihetsgrader per $\mathbf{p}$) og energi-impuls relasjon $E_{\mathbf{p}} = |\mathbf{p}|$, to reelle Klein-Gordon felter (1 bosonisk frihetsgrad hver) med henholdsvis $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2 + \Delta^2}$ og $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2 - \Delta^2}$, og ett Diracfelt (fermionisk med 4 frihetsgrader per $\mathbf{p}$) med $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_f^2}$. Hver bosonisk frihetsgrad teller med en factor $+\frac{1}{2}$, hver fermionisk frihetsgrad med en faktor $-\frac{1}{2}$.

Oppgave 4.

Basert på ren dimensjonsanalyse vil man (i naturlige) enheter anta at Λ er av størrelsesorden 500 TeV^4 (der $1 \text{ TeV} = 10^{12} \text{ eV}$). Omregnet til SI-enheter svarer dette til en massetetthet på

- | | | |
|----|--|-------------------------------------|
| A. | $\varepsilon \approx 5 \cdot 10^{14} \text{ kg/m}^3$ | ☐ |
| B. | $\varepsilon \approx 10^{25} \text{ kg/m}^3$ | ☐ |
| C. | $\varepsilon \approx 5 \cdot 10^{33} \text{ kg/m}^3$ | ☐ |
| D. | $\varepsilon \approx 10^{30} \text{ kg/m}^3$ | ☐ |
| E. | $\varepsilon \approx 10^{35} \text{ kg/m}^3$ | ☒ |

Oppgitt: Lyshastigheten $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$, Planck's konstant $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s}$, positronladningen $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Fotgjengeraktig kan vi først konvertere fra eV til $\text{J} = \text{kgm}^2/\text{s}^2$

$$500 \text{ TeV}^4 = 5 \cdot 10^{50} \text{ eV}^4 = 5 \cdot 10^{50} (1.602 \cdot 10^{-19})^4 \text{ kg}^4 \text{m}^8/\text{s}^8 = 3.293 \cdot 10^{-25} \text{ kg}^4 \text{m}^8/\text{s}^8.$$

For å få et uttrykk med riktig dimensjon må vi dividere med $\hbar^3 c^5$, som har dimensjon $\text{kg}^3 \text{m}^{11} \text{s}^{-8}$. Resultatet blir

$$\frac{3.293 \cdot 10^{-25}}{1.055^3 \cdot 2.998^5 \cdot 10^{-3 \times 34 + 5 \times 8}} \text{ kg/m}^3 \approx 1.16 \cdot 10^{35} \text{ kg/m}^3.$$

Oppgave 5.

Anta at fermionfeltet i (1) kan utvikles i egenmoder som

$$\psi(x) = \sum_{\mathbf{p}, r} c_r(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{-ipx} + d_r^\dagger(\mathbf{p}) u_r(\mathbf{p}) e^{ipx} \quad (4)$$

$c_r(\mathbf{p})$, $(d_r^\dagger(\mathbf{p}))$ er annihilasjonsoperetorer (kreasjons-operatorer) for partiklene (antipartiklene) i modellen, og la $|\Omega\rangle$ være vakuumtilstanden for denne modellen. Marker hvilke av vakuumforventningsverdiene nedenfor som er null

- A. $\langle \Omega | \psi(x) \psi(y) | \Omega \rangle$ ☒
- B. $\langle \Omega | \psi(x) \bar{\psi}(y) | \Omega \rangle$ ☐
- C. $\langle \Omega | \psi(x) c_r^\dagger(\mathbf{p}) | \Omega \rangle$ ☐
- D. $\langle \Omega | c_r^\dagger(\mathbf{p}) \psi(x) | \Omega \rangle$ ☒
- E. $\langle \Omega | \psi(x)^\dagger c_r^\dagger(\mathbf{p}) | \Omega \rangle$ ☒

For å få noe forskjellig fra 0 må vi ha en kreasjonsoperator av type $c^\dagger$ resp. $d^\dagger$ til høyre, og en korresponderende annihilasjonsoperator (av type c resp. d) til venstre.

Oppgave 6.

Diracligningen

$$[i(\gamma^0 \partial_0 + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}) - m] \psi(x^0, \mathbf{x}) = 0$$

er invariant under rominversjon (paritets-transformasjon), $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$. Dvs. at hvis $\psi(x^0, \mathbf{x})$ løser Diracligningen så gjør også $\psi_P(x^0, \mathbf{x})$ det, når

- A. $\psi_P(x^0, \mathbf{x}) = \psi(x^0, -\mathbf{x})$ ☐
- B. $\psi_P(x^0, \mathbf{x}) = \gamma^0 \psi(x^0, -\mathbf{x})$ ☒
- C. $\psi_P(x^0, \mathbf{x}) = i\gamma^2 \psi^*(x^0, -\mathbf{x})$ ☐
- D. $\psi_P(x^0, \mathbf{x}) = \gamma^1 \gamma^3 \psi^*(x^0, -\mathbf{x})$ ☐
- E. $\psi_P(x^0, \mathbf{x}) = \psi^*(-x^0, -\mathbf{x})$ ☐

Vi trenger matrisen γ^0 for å få snudd tilbake fortegnet på leddet $\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}$. Dette får man til ved bruk av $\gamma^0 \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \gamma^0 = -\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}$.

Oppgave 7.

Beregn sporet $T \equiv \text{Tr} \{ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \}$.

Ved bruk av relasjonen $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma_\mu = 4\eta^{\nu\lambda}$, $\gamma^\lambda \gamma_\lambda = 4$ og $\text{Tr} \{1\} = 4$ finner vi

$$T = 4 \times 4 \times 4 = 64.$$

Oppgave 8.

La $\mathcal{T}$ være tidsordningsoperatoren og $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ et kvantisert Diracfelt. Da gjelder (i naturlige enheter, dvs. når $\hbar = c = 1$)

- A. $\mathcal{T} \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} = \mathcal{T} \{ \bar{\psi}(y) \psi(x) \}$ ☐
- B. $\mathcal{T} \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} = \mathcal{T} \{ \bar{\psi}(y) \psi(x) \} + iS_F(x - y)$ ☐
- C. $\mathcal{T} \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} = \mathcal{T} \{ \bar{\psi}(y) \psi(x) \} - iS_F(x - y)$ ☐
- D. $\mathcal{T} \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} = -\mathcal{T} \{ \bar{\psi}(y) \psi(x) \}$ ☒
- E. $\mathcal{T} \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} = -\mathcal{T} \{ \bar{\psi}(y) \psi(x) \} - iS_F(x - y)$ ☐

der $S_F(x-y)$ er Feynmans propagator for Dirac-partikler.

Diracfelter antikommuterer innenfor tidsordningssymbolet (det defineres slik).

Oppgave 9.

Feynmans propagator for et reellt Klein-Gordon felt $\varphi(x)$ er definert ved ligningen

$$i\Delta_F(x-y) = \langle \Omega | \mathcal{T} \{ \varphi(x) \varphi(y) \} | \Omega \rangle.$$

For et fritt felt med masse M kan denne propagatoren representeres ved Fourier-integralet (i naturlige enheter)

- A. $i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2-M^2+i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$ ☐
- B. $i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-M^2+i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$ ☒
- C. $i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2-M^2-i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$ ☐
- D. $i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p}+M)}{p^2-M^2-i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$ ☐
- E. $i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i\eta^{\mu\nu}}{p^2-i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$ ☐

Vi har et skalarfelt, derfor ingen firervektor eller Dirac indekser. Det burde utelukke alternativene A, D og E. Så må man bare *huske* at det er alternativ B og ikke C.

Oppgave 10.

La $\varphi_1(x)$ være feltet definert i Lagrangetettheten (1).

Finn uttrykket for $\langle \Omega | \mathcal{T} \{ \varphi_1(x) \varphi_1(y) \} | \Omega \rangle$ i denne modellen.

I analysen av oppgave 2 fant vi at $\varphi_1(x) = (\varphi_+(x) + \varphi_-(x))/\sqrt{2}$ der φ_+ og φ_- er to uavhengige Klein Gordon felt (riktig normert). Det følger at

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \mathcal{T} \{ \varphi_1(x) \varphi_1(y) \} | \Omega \rangle &= \frac{1}{2} \langle \Omega | \mathcal{T} \{ \varphi_+(x) \varphi_+(y) \} | \Omega \rangle + \frac{1}{2} \langle \Omega | \mathcal{T} \{ \varphi_-(x) \varphi_-(y) \} | \Omega \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{p^2 - M^2 - \Delta^2 + i\epsilon} + \frac{i}{p^2 - M^2 + \Delta^2 + i\epsilon} \right) e^{-ip(x-y)}. \end{aligned}$$