

Løsningsforslag til eksamen i
FY3404/FY8307 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK
 Fredag 9. juni 2006

Dette løsningsforslaget er på 4 sider, pluss et vedlegg på 2 sider.

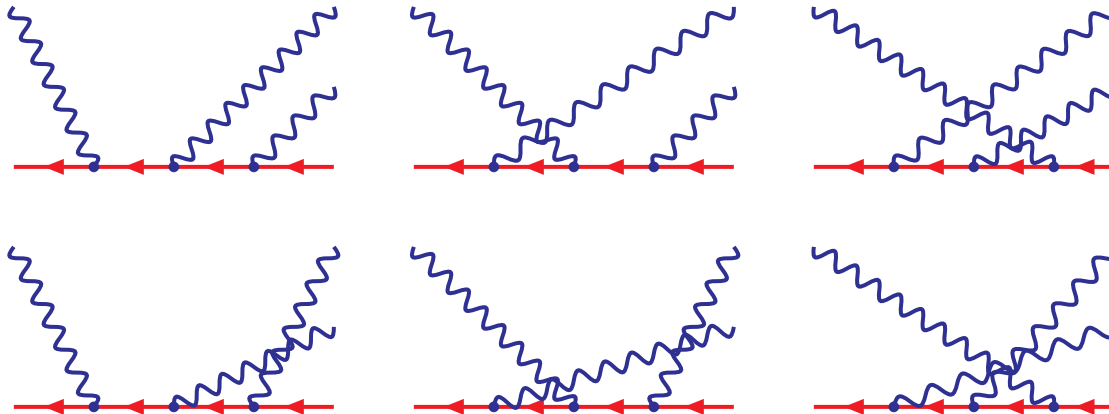
Oppgave 1. Prosesser i QED

Tegn, i de tilfelle dette er mulig i kvante-elektrodynamikk (QED), Feynman diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene nedenfor. For noen tilfeller eksisterer det Feynman diagram, men prosessen er likevel ikke mulig i vakuum. Angi slike tilfeller, og forklar kort hva som gjør prosessen umulig.

a) $e^+\gamma \rightarrow e^+\gamma$



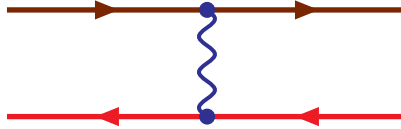
b) $e^+\gamma \rightarrow e^+\gamma\gamma$



c) $e^+\mu^- \rightarrow e^-\mu^+$

Denne prosessen bryter bevaring av elektrontall og myontall, og er derfor umulig i QED .

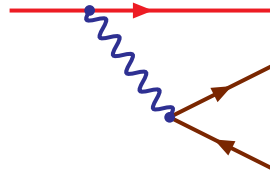
d) $e^+\mu^- \rightarrow e^+\mu^-$



e) $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$



f) $e^- \rightarrow e^- \mu^+ \mu^-$



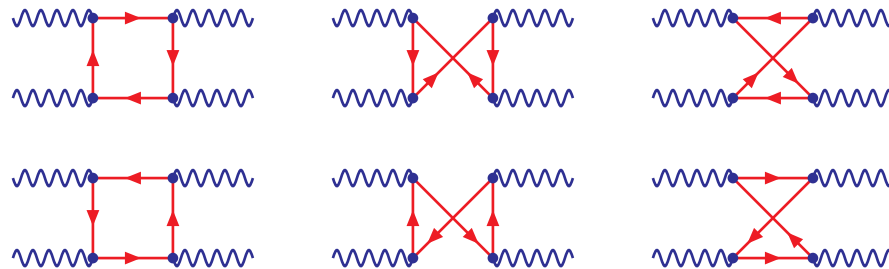
Likevel en umulig prosess pga konservering av firer-impuls.

g) $\gamma\gamma \rightarrow \gamma$



Men bidragene fra disse to amplitudene kansellerer eksakt i *QED* (Furry's teorem) som en konsekvens av invarians under ladningskonjugasjon. Uansett ville prosessen vært umulig pga konservering av firer-impuls.

h) $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$



i) $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma\gamma$

Her er der $4! = 24$ diagrammer som parvis kansellerer hverandre eksakt i *QED* (Furrys teorem) som en konsekvens av invarians under ladningskonjugasjon.

Oppgave 2. Möllerspredning

I denne oppgaven skal du se på noen aspekter ved Möllerspredning, $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$.

- a) Tegne alle Feynman diagrammene til laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen. Skriv ned alle nødvendige firerimpulser og indekser på diagrammene.

Anta at elektronene i starttilstanden har kvantetall $p_i, s_i, i = 1, 2$, og at elektronene i slutttilstanden har kvantetall $p'_f, s'_f, f = 1, 2$. Innfør videre $q = p_1 - p'_1$ og $q' = p_1 - p'_2$.

- b) Bruk Feynmanreglene i vedlegget til å skrive ned det tilhørende algebraiske uttrykket for spredningsamplituden $\mathcal{M}_{fi}$.
- c) For å beregne det upolariserte spredningstverrsnittet trenger vi den kvadrerte amplituden $|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2$, midlet over spinnene til elektronene i starttilstanden og summert over spinnene til elektronene i slutttilstanden,

$$|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 \equiv \frac{1}{4} \sum_{\{s_i, s'_f\}} \mathcal{M}_{fi} \mathcal{M}_{fi}^*. \quad (1)$$

Dette uttrykket kan bli skrevet som en sum som involverer spor over γ -matriser. Vis at et ledd i denne summen har formen

$$\mathcal{F}(q) \times \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu (\not{p}'_1 + m_e) \right\} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu (\not{p}_2 + m_e) \gamma_\nu (\not{p}'_2 + m_e) \right\}, \quad (2)$$

og bestem funksjonen $\mathcal{F}(q)$.

- d) Regn ut produktet av sporene over

$$Q \equiv \text{Tr} \left\{ \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu (\not{p}'_1 + m_e) \right\} \text{Tr} \left\{ \gamma_\mu (\not{p}_2 + m_e) \gamma_\nu (\not{p}'_2 + m_e) \right\}. \quad (3)$$

Uttrykk svaret ved skalarprodukter av firerimpulsene som inngår.

Oppgave 3. Klein-Gordon felt i et konformt flatt rom

Dynamikken til et komplekst Klein-Gordon felt $\varphi(x)$ i et krumt (men konformt flatt) rom er definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = e^{\lambda(x)} [\partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi], \quad (4)$$

der funksjonen $\lambda(x)$ antas å være kjent på forhånd. Vi bruker enheter der $\hbar = c = 1$.

- a) Hva blir de kanonisk konjugerte impulstetthetene Π_φ og Π_{φ^*} til feltene φ og φ^* ?

$$\Pi_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = e^{\lambda(x)} \dot{\varphi}^*, \quad \Pi_{\varphi^*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = e^{\lambda(x)} \dot{\varphi}. \quad (5)$$

- b) Hva blir Hamiltontettheten $\mathcal{H}$?

$$\mathcal{H} = \Pi_\varphi \dot{\varphi} + \Pi_{\varphi^*} \dot{\varphi}^* - \mathcal{L} = e^{-\lambda(x)} \Pi_{\varphi^*} \Pi_\varphi + e^{\lambda(x)} (\nabla \varphi^* \nabla \varphi + m^2 \varphi^* \varphi). \quad (6)$$

- c) Hva blir bevegelsesligningene (Euler-Lagrange ligningene) for φ og φ^* ?

Fra henholdsvis $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi^*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*}$ og $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}$ finner vi etter divisjon med $e^{\lambda(x)}$

$$e^{-\lambda(x)} \partial_\mu e^{\lambda(x)} \partial^\mu \varphi(x) + m^2 \varphi(x) = 0, \quad e^{-\lambda(x)} \partial_\mu e^{\lambda(x)} \partial^\mu \varphi^*(x) + m^2 \varphi^*(x) = 0. \quad (7)$$

- d) Vis at man ved å innføre feltet $\psi(x) = e^{\frac{1}{2}\lambda(x)} \varphi(x)$ kan transformere bevegelsesligningen til en Klein-Gordon ligning med et x -avhengig masseledd $M^2(x)$.

Vi setter inn $\phi(x) = e^{-\frac{1}{2}\lambda(x)}\psi(x)$ i ligning (7) og finner

$$\begin{aligned} \partial_\mu e^\lambda \partial^\mu e^{-\frac{1}{2}\lambda} \psi &= \partial_\mu e^{\frac{1}{2}\lambda} \left(\partial^\mu \psi - \frac{1}{2}(\partial^\mu \lambda) \psi \right) \\ &= e^{\frac{1}{2}\lambda(x)} \left[\square \psi - \frac{1}{2}(\square \lambda) \psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu \lambda)(\partial^\mu \lambda) \psi \right]. \end{aligned}$$

Altså får vi

$$\square \psi(x) + M^2(x) \psi(x) = 0, \quad \text{der } M^2(x) = m^2 - \frac{1}{2}\square \lambda - \frac{1}{4}(\partial_\mu \lambda)(\partial^\mu \lambda). \quad (8)$$

- e) Vi antar nå at $\lambda(x) = 2\mu t$ (i et gitt koordinatsystem), og kvantiserer denne feltteorien. Hva blir i dette tilfellet utviklingen av det annenkvantiserte feltet $\psi(x)$, uttrykt ved kreasjons- og annihilasjonsoperatorer? Du kan anta et endelig volum med periodiske grensebetingelser.

Med $\lambda(x) = 2at$ vil $\psi(x)$ tilfredsstille en vanlig Klein-Gordon ligning med konstant masseparameter $M^2 = m^2 - a^2$. Vi kan da forvente at ψ , $\psi^\dagger$ vil ha en vanlig utvikling i kreasjons og annihilasjonsoperatorer

$$\psi(x) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}V}} \left[a(\mathbf{p}) e^{-ipx} + b^\dagger(\mathbf{p}) e^{ipx} \right], \quad (9)$$

$$\psi^\dagger(x) = \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}V}} \left[b(\mathbf{p}) e^{-ipx} + a^\dagger(\mathbf{p}) e^{ipx} \right], \quad (10)$$

der $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}$ og $px = \omega_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$, og der $a^\dagger(\mathbf{p})$, $b^\dagger(\mathbf{p})$, $a(\mathbf{p})$ og $b(\mathbf{p})$ oppfyller de vanlige kommuteringsreglene for kreasjons- og annihilasjonsoperatorer. Vi vet fra kvantisering av det vanlige komplekse Klein-Gordon feltet at denne ekspansjonen løser feltligningen og oppfyller de vanlige til *lik-tid* kommuteringsreglene

$$\left[\psi^\dagger(t, \mathbf{x}), \psi(t, \mathbf{y}) \right] = \left[\dot{\psi}(t, \mathbf{x}), \psi^\dagger(t, \mathbf{y}) \right] = -i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

med alle andre *lik-tid* kommutatorer mellom feltene og deres tidsderiverte lik null.

Kommentar: Merk at det oppstår en ustabilitet, $M^2 < 0$, hvis geometrien endrer seg for raskt, dvs. hvis $a^2 > m^2$.

Kommentar til de pedantiske: Selvfølgelig skal man også kontrollere hva som er de korrekte kanoniske konjugerte feltene til ψ og $\psi^\dagger$. For dette må vi starte med Lagrangetettheten uttrykte ved ψ og $\psi^\dagger$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= e^{2at} (\partial_\mu e^{-at} \psi^*) (\partial^\mu e^{-at} \psi) - m^2 \psi^* \psi \\ &= (\dot{\psi}^* - a\psi^*)(\dot{\psi} - a\psi) - \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - m^2 \psi^* \psi. \end{aligned}$$

Denne Lagrangetettheten avviker bare med en totalderivert, $\Delta \mathcal{L} = -a \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \psi$, fra den vanlige Lagrangetettheten for Klein-Gordon feltet. De to teoriene må derfor være ekvivalente. Dette kan vi også sjekke eksplisitt. De kanonisk konjugerte feltene blir

$$\Pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \dot{\psi}^* - a\psi^*, \quad \Pi_{\psi^*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = \dot{\psi} - a\psi.$$

Fra dette kan vi verifisere at ekspansjonene (9, 10) oppfyller de riktige *lik-tid* kommuteringsreglene. F. eks. har vi

$$[\Pi_\psi(t, \mathbf{x}), \psi(t, \mathbf{y})] = [\dot{\psi}^\dagger(t, \mathbf{x}), \psi(t, \mathbf{y})] - a [\psi^\dagger(t, \mathbf{x}), \psi(t, \mathbf{y})] = -i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (11)$$

siden $[\psi^\dagger(t, \mathbf{x}), \psi(t, \mathbf{y})] = 0$.

1 Sammenheng mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og tverrsnitt σ

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_f p'_f) \prod_{f=1}^n \frac{d^3 p'_f}{(2\pi)^3 2E'_f} \quad (12)$$

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2 (p_1 + p_2)^2} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Omega \quad \text{for } n = 2 \text{ i massesenter systemet} \quad (13)$$

2 Noen Feynmanregler for $-i\mathcal{M}_{fi}$:

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \dots$		$\bar{u}(p, s)$	$e^-, \mu^-, \dots$		$u(p, s)$
$e^+, \mu^+, \dots$		$v(p, s)$	$e^+, \mu^+, \dots$		$\bar{v}(p, s)$
γ (foton)		$e_\mu(k, r)^*$	γ (foton)		$e_\mu(k, r)$
Uladet spinn-0		1	Uladet spinn-0		1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{\text{int}}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \dots$		$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	$e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$		$ie\gamma^\mu$
γ (foton)		$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{3!}\mu\varphi^3$		$-i\mu$
Uladet spinn-0		$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{4!}\lambda\varphi^4$		$-i\lambda$

- Konservering av firer-impuls i hver knute.
- Integrasjon $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.
- Faktor -1 for hver lukket fermionsløyfe.
- Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.
- Kombinatorisk faktor $1/S$, der S er diagrammets symmetritall.

3 Noen fullstendighetsrelasjoner

Dirac partikler, Dirac antipartikler, og fotoner

$$\sum_{s=1}^2 u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m, \quad \sum_{s=1}^2 v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m \quad (14)$$

$$\sum_{r=1}^2 e_\mu(k, r) e_\nu^*(k, r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \quad (15)$$

4 Dirac's γ -matriser

4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

der I er en 2×2 enhetsmatrise, og $\boldsymbol{\sigma}$ er Pauli-matrisene,

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

som oppfyller den algebraiske relasjonen

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k, \text{ dvs. at } (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (18)$$

4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \implies \not{p}\not{p} = p^2 \quad (19)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \implies \gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu = -2\not{p} \quad (20)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma_\mu = 4\eta^{\nu\lambda} \implies \gamma_\mu \not{p} \not{q} \gamma^\mu = 4(pq) \quad (21)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu \implies \gamma_\mu \not{p} \not{q} \not{r} \gamma^\mu = -2\not{r} \not{q} \not{p} \quad (22)$$

4.3 Noen spor-uttrykk

$$\text{Tr } 1 = 4 \quad (23)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu = 0 \quad (24)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 4\eta^{\mu\nu} \implies \text{Tr } \not{p} \not{q} = 4(pq) \quad (25)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda = 0 \quad (26)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma = 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\lambda}) \quad (27)$$

$$\implies \text{Tr } \not{p} \not{q} \not{r} \not{s} = 4(pq)(rs) - 4(pr)(qs) + 4(ps)(qr)$$