

Eksamen i FY6017 Elektromagnetisme 6. juni 2018

Oppgaver med løsningsforslag

Oppgave 1. Elektrostatikk. (Poeng: 15)

Et elektron og to protoner er plassert langs ei rett linje som vi legger langs x -aksen. Elektronet ligger fast i origo, et av protonene ligger fast i posisjon $x = 2.5$ nm.

a) I første omgang ligger også det andre protonet fast, i posisjon $x = 5.0$ nm. Hva er nå systemets totale potensielle energi U ? Regn ut svaret i enheten eV (elektronvolt). Vi velger her $U = 0$ når de tre partiklene alle er uendelig langt fra hverandre.

Svar:

$$U_0 = \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} (-1 - 1/2 + 1) = -0.29 \text{ eV}.$$

b) Protonet i posisjon $x = 5.0$ nm slippes nå med null starthastighet, mens de to andre partiklene holdes fast. Bruk prinsippet om energibevarelse og beregn hastigheten til det frie protonet når det har kommet langt ut på x -aksen.

Svar:

$$U_1 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} = -0.58 \text{ eV} \quad (1)$$

$$\Rightarrow K_p = \frac{1}{2} m_p v^2 = 0.29 \text{ eV} \quad (2)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2K_p/m_p} = 7429 \text{ m/s} = 7.4 \text{ km/s} \quad (3)$$

Oppgave 2. Metaller. (Poeng: 15)

a) Forklar kort hvorfor det elektriske feltet må være null inne i et metall i elektrostatisk likevekt.

b) Forklar kort hvorfor det elektriske feltet må stå vinkelrett på overflaten på overflaten av et metall i elektrostatisk likevekt.

c) Forklar kort hvorfor et stykke metall må være et ekvipotensial i elektrostatisk likevekt.

d) Forklar kort hva som menes med et Faraday-bur.

Svar oppgave 2:

Se forelesningsnotater.

Oppgave 3. Dielektrikum. (Poeng: 10)

Vi betrakter en isolator som består av molekyler med et permanent elektrisk dipolmoment. Gi en kvalitativ mikroskopisk forklaring på hvorfor det elektriske feltet er svakere inne i isolatoren enn utenfor dersom den plasseres i et uniformt ytre elektrisk felt.

Svar:

Se forelesningsnotater.

Oppgave 4. Kondensator. (Poeng: 5)

En parallellplatekondensator har plateareal 100 cm^2 og plateavstand 0.5 mm . Volumet mellom platene er fylt med et dielektrikum med relativ permittivitet 5.5 . Beregn kondensatorens kapasitans.

Svar:

$$C = \epsilon A/d = \epsilon_r \epsilon_0 A/d = 9.7 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 0.97 \text{ nF} \simeq 1 \text{ nF}$$

Oppgave 5. RC-krets. (Poeng: 20)

En likespenningskilde på 30.0 V kobles til en seriekobling av en resistans $1.00 \text{ M}\Omega$ og en kapasitans 1.00 mF .

a) Bruk Kirchhoffs spenningsregel (sløyferegul) til å finne differensialligningen for ladningen $Q(t)$ på kondensatoren. Vis (gjærne ved innsetting) at løsningen av ligningen er på formen

$$Q(t) = Q_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right),$$

og fastlegg dermed størrelsene Q_0 og τ .

Svar:

Vi summerer (f eks positive) potensialendringer rundt sløyfa:

$$V_0 - RI - Q/C = 0.$$

Med $I = dQ/dt$ finner vi differensialligningen for $Q(t)$:

$$V_0 - R dQ/dt - Q/C = 0.$$

Innsetting av den oppgitte løsningen gir

$$V_0 - (Q_0 R/\tau) \exp(-t/\tau) - (Q_0/C)(1 - \exp(-t/\tau)) = 0.$$

Da må vi ha

$$V_0 - Q_0/C = 0$$

og

$$-R/\tau + 1/C = 0,$$

dvs

$$Q_0 = V_0 C = 30 \text{ mC} \quad \text{og} \quad \tau = RC = 10^3 \text{ s}.$$

b) Hva blir strømmen $I(t)$ i kretsen umiddelbart etter at spenningskilden er koblet til?

Svar:

$$I(t) = dQ/dt = (V_0/R) \exp(-t/RC),$$

dvs $I(0) = V_0/R = 30 \mu\text{A}$.

c) Hvor lang tid tar det før strømmen i kretsen er redusert til 10% av verdien du fant i oppgave b)?

Svar:

Da er $\exp(-t/RC) = 1/10$, dvs $t = RC \ln 10 = 2.3 \cdot 10^3 \text{ s}$.

Oppgave 6. Magnetostatikk. (Poeng: 20)

Forklar, med tekst og figur, hvordan ioner med ulik masse og/eller ladning kan separeres ved hjelp av et massespektrometer, der ionene først akselereres ved hjelp av et elektrisk felt og deretter sendes inn i et uniformt magnetfelt.

Lag selv et eksempel med to isotoper av et gitt grunnstoff med lik ladning og ulik masse. Velg tallverdier for størrelser som inngår i problemet og bestem forskjellen i radien til de to isotopenes sirkelbane i magnetfeltet.

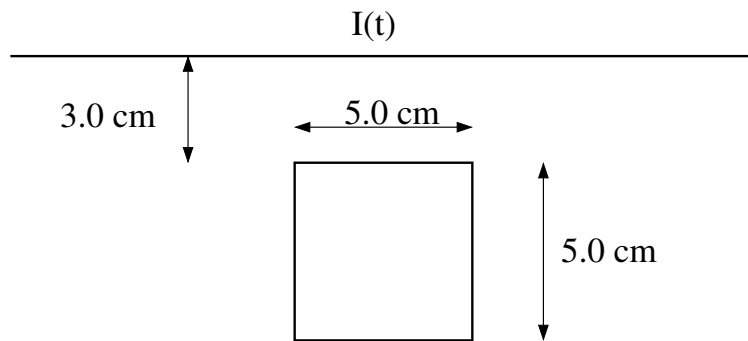
Svar:

Se forelesningsnotater for forklaring med tekst og figur.

Med spenning V og ladning q (og lav starthastighet $v \simeq 0$) oppnår ionene kinetisk energi $K = Vq$ og dermed hastighet $v = \sqrt{2qV/m}$. Newtons andre lov med $F = qvB$ og $a = v^2/R$ gir ionene sirkelbevegelse i magnetfeltet med radius $R = mv/qB = (1/B)\sqrt{2mV/q}$.

Talleksempel: Vannmolekyler med ladning $+e$, med hhv to vanlige hydrogenatomer (H_2O^+) og det andre med et vanlig hydrogen atom og et deuterium, dvs en kjerne med et proton og et nøytron (HDO^+). Massene er da hhv 18u og 19u. Vi kan velge f.eks $B = 1.5 \text{ T}$ (et forholdsvis sterkt magnetfelt) og $V = 20 \text{ kV}$. Da blir $R = 5.9 \text{ mm}$ for H_2O^+ og $R = 5.8 \text{ mm}$ for HDO^+ .

Oppgave 7. Induksjon (Poeng: 15)



I en lang rett leder går det en vekselstrøm $I(t) = I_0 \sin \omega t$ med amplitude $I_0 = 2.5 \text{ A}$ og frekvens $f = \omega/2\pi = 50 \text{ Hz}$. Ei kvadratisk ledersløyfe med sidekanter 5.0 cm er plassert med en minsteavstand 3.0 cm fra den rette lederen. (Den rette lederen ligger i samme plan som ledersløyfa.)

a) Bestem induisert spenning i den kvadratiske ledersløyfa, inkludert tallverdi på amplituden.

Svar:

Magnetisk feltstyrke i avstand x fra den rette lederen er

$$B(x, t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x}.$$

Magnetisk fluks omsluttet av den kvadratiske ledersløyfa:

$$\phi(t) = \frac{\mu_0 b I_0 \sin \omega t}{2\pi} \int_3^8 \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 b I_0 \sin \omega t}{2\pi} \ln \frac{8}{3}.$$

Indusert spenning i ledersløyfa:

$$V(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 b I_0 \omega \cos \omega t}{2\pi} \ln \frac{8}{3}.$$

Innsetting av tallverdier gir $7.7 \mu\text{V}$.

b) Bestem den gjensidige induktansen mellom ledersløyfa og den rette lederen.

Svar:

$$M = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{8}{3} = 9.8 \text{ nH}.$$