

I alt 20 deloppgaver som normalt gis lik vekt i vurderingen.

Oppgave 1. Litt av hvert. (Poeng: 50)

a) Maksimal intensitet (pr bølgelengdeenhet) i strålingen fra sola opptrer ved ca 510 nm. Hva er impulsen (bevegelsesmengden) til et foton med denne bølgelengden?

b) I et transmisjonselektronmikroskop (TEM) akselereres elektroner slik at de oppnår kinetisk energi i området 100 – 400 keV. Hva er bølgelengden til et elektron med kinetisk energi 120 keV?

c) Partikler med masse (som elektroner, protoner etc) betegnes som *relativistiske* dersom deres kinetiske energi er av samme størrelsesorden som eller større enn deres hvileenergi mc^2 . Et proton akselereres slik at det oppnår en kinetisk energi 2.50 GeV. Hva er da protonets hastighet?

d) Et mye brukt kjølemiddel i moderne kjøleskap og fryserer er isobutan, med kjemisk formel C_4H_{10} . Hva er molekylets termiske de Broglie bølgelengde i isobutangass ved absolutt temperatur 300 K?

e) Den kosmiske bakgrunnsstrålingen (CMB) tilsvarer stråling fra et svart legeme med absolutt temperatur 2.72548 ± 0.00057 K. Ved hvilken bølgelengde har CMB maksimal intensitet? (Tips: Wiens forskyvningslov.)

f) Avbildning med kjernemagnetisk resonans (MRI) er basert på at en magnetisk dipol med magnetisk moment μ har en potensiell energi som avhenger av dipolens orientering i et ytre magnetfelt $\mathbf{B}$, $V = -\mu \cdot \mathbf{B}$. Anta hydrogenkjerner med ett proton og kvantisert magnetisk moment $\mu_z = 2.7928 \mu_N$, med retning parallelt eller antiparallelt med et ytre magnetfelt $\mathbf{B} = B \hat{z}$ langs z -aksen. Slike kjerner kan da absorbere (og reemitte) fotoner med en energi som tilsvarer at den magnetiske dipolen skifter retning. Bestem fotonenes bølgelengde (i vakuum og luft) når styrken på magnetfeltet er 8.0 T.

g) Fosforatomet (P) har 15 elektroner. Elektronkonfigurasjonen er $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^3$. Bruk Hunds regel til å fastlegge totalt elektronspinn i grunntilstanden til et fosforatom.

h) Vibrasjoner i karbonmonoksyd, CO, kan med brukbar tilnærming betraktes som en enkel endimensjonal harmonisk oscillator, med egenfrekvens $\nu = \omega/2\pi \simeq 6.42 \cdot 10^{13}$ Hz. Omtrent hvor høy temperatur må da til for å eksitere CO fra laveste til nest laveste vibrasjonsnivå?

i) Rotasjonsbevegelsen til CO-molekylet kan med brukbar tilnærming betraktes som en stiv rotator. C og O har atommasser hhv $m_C = 12u$ og $m_O = 16u$, og bindingslengden i molekylet er $d = 0.143$ nm. Omtrent hvor høy temperatur må da til for å eksitere CO fra laveste til nest laveste rotasjonsnivå?

j) Translasjonsenergien til CO-molekylet kan som regel betraktes med klassiske briller, men dersom molekylet tvinges til å bevege seg på et tilstrekkelig lite område, må også translasjonsenergien beskrives med kvantemekanikk. Anta at et CO-molekyl befinner seg i en endimensjonal og praktisk talt uendelig dyp potensialbrønn med bredde 10 nm. Omtrent hvor høy temperatur må da til for å eksitere CO fra laveste til nest laveste translasjonsnivå? (Tips: Partikkel i boks.)

Oppgitt for h , i og j : Tilgjengelig termisk energi ved absolutt temperatur T er ca $k_B T$. Sett $\Delta E \simeq k_B T$.

Oppgave 2. Operatorer. (Poeng: 15)

a) Vis at

$$\Psi(x) = e^{ikx}$$

er egenfunksjon til impulsoperatoren $\hat{p}_x$ og bestem tilhørende egenverdi.

b) Vis at

$$\Psi(x, y) = x + iy$$

er egenfunksjon til operatoren for dreieimpulsens z -komponent $\hat{L}_z$ og bestem tilhørende egenverdi.c) Vis at $\hat{p}_y$ kommuterer med hamiltonoperatoren for en fri partikkel i to dimensjoner,

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

Oppgave 3. Ikke-stasjonær starttilstand for partikkel i boks. (Poeng: 5)

Den romlige delen av grunntilstanden er

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin k_1 x$$

for en partikkel med masse m i en uendelig dyp potensialbrønn med bredde L . (Dvs, $V(x) = 0$ for $0 < x < L$ og $V = \infty$ ellers.) Her er $k_1 = \pi/L$. En ikke-stasjonær og normert starttilstand

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

kan uttrykkes som en lineærkombinasjon av stasjonære løsninger av TUSL,

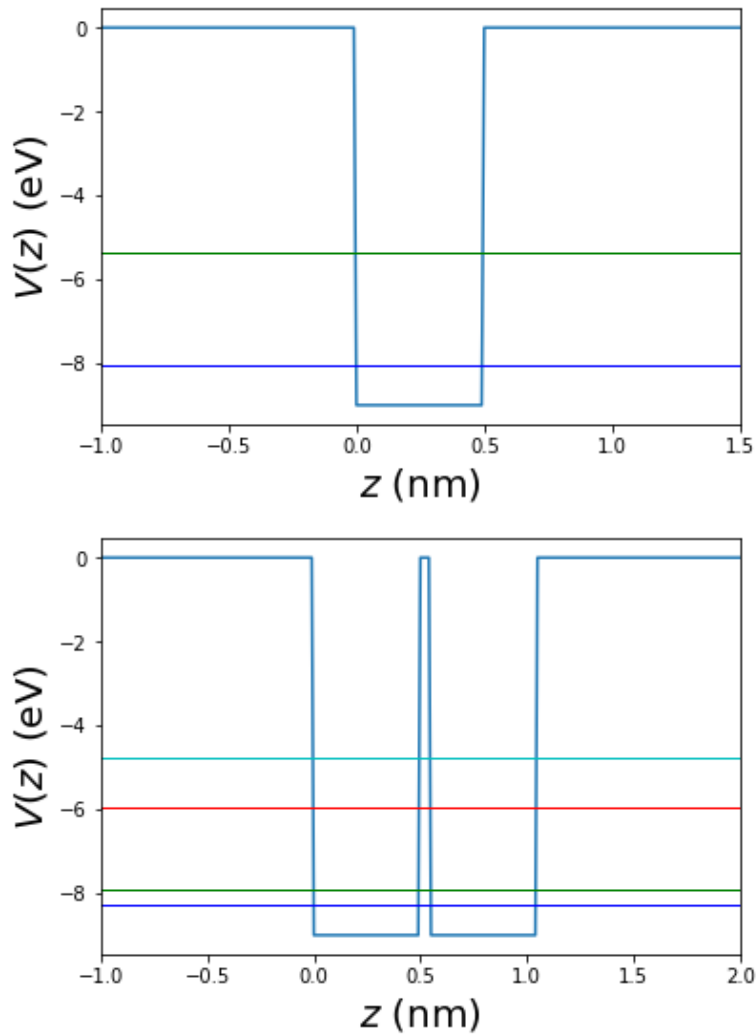
$$\Psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

slik at tidsutviklingen for $t > 0$ deretter blir

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}.$$

Beregn koeffisienten c_1 . Tips: Se formelvedlegg, øving og forelesningsnotater. Det oppgis at

$$\int_0^L \sin(\pi x/L) dx = 2L/\pi.$$

Oppgave 4. Endimensjonal modell for atom og toatomig molekyl. (Poeng: 10)

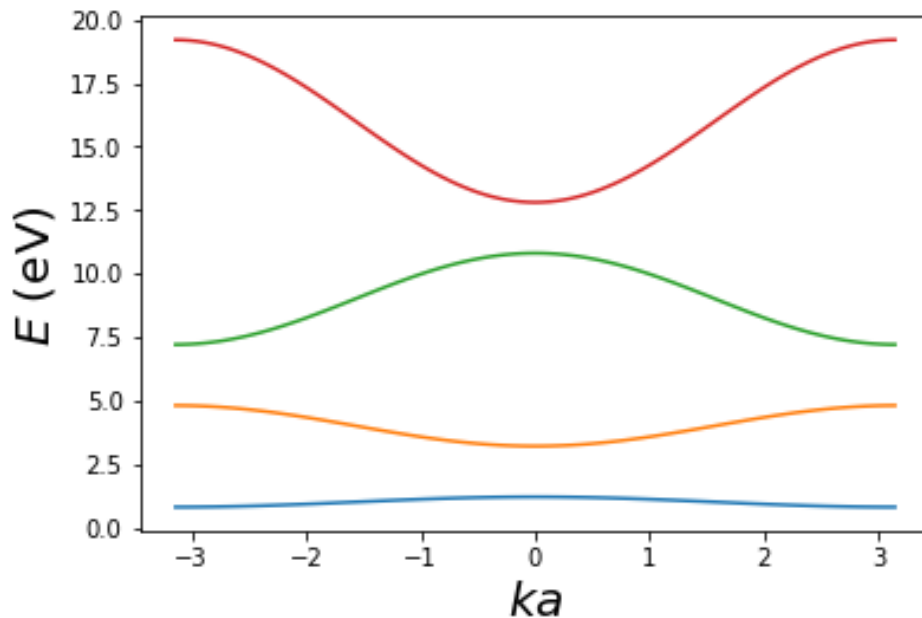
Figuren viser en endimensjonal modell for hhv et enkelt atom A og et toatomig molekyl A_2 . For atomet er potensialet $V(z) = -9.0$ eV for $0 < z < 0.50$ nm, og $V(z) = 0$ ellers. For molekylet er potensialet $V(z) = -9.0$ eV for $0 < z < 0.50$ nm og $0.55 < z < 1.05$ nm, og $V(z) = 0$ ellers. La oss anta at hvert A-atom har 3 elektroner som ikke vekselvirker med hverandre, verken i atomet eller i molekylet.

a) Skisser kvalitativt grunntilstanden og 1. eksiterte tilstand for et elektron i atomet A. Skisser også kvalitativt grunntilstanden og 1. eksiterte tilstand for et elektron i molekylet A_2 .

b) De 2 laveste energinivåene i atomet er -8.07 eV og -5.37 eV. De 4 laveste energinivåene i molekylet er -8.29 eV, -7.93 eV, -5.95 eV og -4.79 eV. (Angitt i figuren.) Regn ut molekylets bindingsenergi, dvs energidifferansen mellom 2 separate A-atomer og et A_2 -molekyl. (Husk Pauliprinsippet, og husk at hver romlige tilstand – orbital – gir opphav til to enpartikkeltilstander når vi tar hensyn til at et elektron har to spinnmuligheter, opp og ned.)

Oppgave 5. Krystaller og halvlederfysikk. (Poeng: 20)

a) Hva sier Blochs teorem om egenskapene til bølgefunksjoner som beskriver elektroner i en perfekt krystall?



b) Figuren viser de fire laveste energibåndene $E_n(k)$, dvs elektronenes tillatte energier E som funksjon av ka , der k er bølgetallet i en endimensjonal modell av en krystall med gitterkonstant (dvs avstand mellom naboatomer) $a = 0.30$ nm. Energibåndene i denne modellen kan beskrives matematisk på formen

$$E_n(k) = C_n \left(1 - \frac{(-1)^n}{5} \cos ka \right),$$

med $C_n = n^2$ eV for $n = 1, 2, 3, 4$. Hvert energibånd inneholder $2N$ ulike tilstander. Her er N antall atomer i krystallen, og faktoren 2 skyldes at hver romlige tilstand (orbital) kan kombineres med to ulike spinn-tilstander, spinn opp eller spinn ned. Anta at hvert atom i denne krystallen inneholder 6 elektroner. Forklar hvordan energibåndene okkuperes (fylles) med elektroner i grunntilstanden, i det du tar hensyn til Pauliprinsippet. Hvorfor er denne krystallen en halvleder, og ikke et metall eller en isolator? (Tips: Regn ut størrelsen på båndgapet.)

c) Ved normale temperaturer vil en liten andel av elektronene ved toppen av valensbåndet ($n = 3$) være eksitert til tilstander nær bunnen av ledningsbåndet ($n = 4$). Hva er her den effektive massen m_e^* til et elektron med energi nær bunnen av krystallens ledningsbånd? (Tips: For $ka \ll 1$ er $\cos ka \simeq 1 - k^2 a^2 / 2$ slik at $E_n(k) \simeq C_n (1 - (-1)^n / 5 + (-1)^n k^2 a^2 / 10)$.)

d) Ved å erstatte noen av atomene i denne perfekte krystallen med andre atomer, kan man lage henholdsvis en p -type og en n -type halvleder. Forurensningsatomene må da ha hhv ledig(e) og okkupert(e) tilstand(er) med passende energi(er). Omtrent hvor ligger disse passende energinivåene for denne endimensjonale modellkrystallen? Forklar kort hvordan slike urenheter påvirker materialets elektriske ledningsevne.

FORMLER OG UTTRYKK.

Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

- Plancks strålingslov ($I(\nu, T)$ = utstrålt energi pr tids-, flate- og frekvensenhet):

$$I(\nu, T) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2 (e^{h\nu/k_B T} - 1)}$$

- Wiens forskyvningslov (for maksimal $I(\lambda, T)$ ved gitt temperatur T):

$$\lambda \cdot T = 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ Km}$$

- Fotoelektrisk effekt:

$$U = \frac{h}{e} \nu - \frac{W}{e}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Relativistisk impuls:

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$$

- Newtons 2. lov:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

- Relativistisk energi:

$$\begin{aligned} E &= \gamma m c^2 \\ E_0 &= m c^2 \\ K &= E - E_0 = (\gamma - 1) m c^2 \\ E^2 &= (pc)^2 + (m c^2)^2 \end{aligned}$$

- Elastisk prosess: E , $\mathbf{p}$, K og m bevart.

- Uelastisk prosess: E og $\mathbf{p}$ bevart.

- Bølger:

$$c = \lambda \nu$$

- de Broglie:

$$\lambda = h/p, \quad \nu = E/h$$

- Termisk de Broglie bølgelengde:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}$$

- Schrödingerligningen (SL):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi$$

- Tidsuavhengig Schrödingerligning (TUSL):

$$\hat{H} \psi = E \psi$$

- Operatorer:

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad , \quad \hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \quad , \quad f(p) \rightarrow f(\hat{p})$$

- Heisenbergs uskarphetsprinsipp:

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle|$$

- Kommutator:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}$$

- Stasjonær tilstand:

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-iEt/\hbar}$$

- Forventningsverdier:

$$\langle x \rangle = \int \Psi^* x \Psi dx \quad , \quad \langle p_x \rangle = \int \Psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi dx \quad , \quad \langle F \rangle = \int \Psi^* \hat{F} \Psi dx$$

- Bølgepakke:

$$\Psi(x, t) = \sum_j c_j \psi_j(x) e^{-iE_j t/\hbar} \quad , \quad c_j = \int \psi_j^*(x) \Psi(x, 0) dx \quad , \quad \langle F \rangle = \sum_j |c_j|^2 F_j$$

- Grensebetingelser:

$\psi(x)$ kontinuerlig overalt, $d\psi/dx$ diskontinuerlig kun ved ∞ sprang i $V(x)$

- Sannsynlighetsstrøm:

$$j = \text{Re} \left[\Psi^* \left(\frac{\hbar}{mi} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi \right]$$

- Usikkerhet:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad , \quad \Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$$

- Ehrenfests teorem:

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{r} \rangle = \frac{\mathbf{p}}{m} \quad , \quad \frac{d}{dt} \langle \mathbf{p} \rangle = -\langle \nabla V \rangle$$

- Harmonisk oscillator:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega$$

- Stiv rotator:

$$E_l = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I} \quad , \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad , \quad I = \text{treghetsmoment} = \sum_j m_j r_j^2$$

- Redusert masse μ :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots$$

- Konstruktiv interferens:

$$d \sin \theta = n \lambda$$

Fundamentale konstanter:

$$\begin{aligned}k_B &= 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \\N_A &= 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \\h &= 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \\\hbar &= h/2\pi = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \\e &= 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\m_e &= 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\m_p &= 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\m_n &= 1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\u &= 1.661 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\c &= 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\\alpha &= e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c = 1/137.0 \\a_0 &= 4\pi\epsilon_0\hbar^2/e^2m_e = 0.5292 \text{ \AA} \\\mu_B &= e\hbar/2m_e = 9.274 \cdot 10^{-24} \text{ J/T} \\\mu_N &= e\hbar/2m_p = 5.051 \cdot 10^{-27} \text{ J/T} \\R_\infty &= \frac{1}{2}m_e c^2 \alpha^2 = 13.61 \text{ eV}\end{aligned}$$

Omregningsfaktorer:

$$\begin{aligned}1 \text{ eV} &= 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\1 \text{ \AA} &= 0.1 \text{ nm} = 10^{-10} \text{ m} \\1 \text{ T} &= 10^4 \text{ G (gauss)} \\k_B T &\simeq \frac{1}{40} \text{ eV ved } T = 300 \text{ K}\end{aligned}$$