

Oppgave 1. Litt av hvert. (Poeng: 50)

a) $p = h/\lambda = 6.626 \cdot 10^{-34} / 510 \cdot 10^{-9} = 1.30 \cdot 10^{-27} \text{ kg m/s.}$

b) Elektronet har masse $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ og dermed hvileenergi $E_0 = m_e c^2 = 512 \text{ keV}$. Med kinetisk energi $K = 120 \text{ keV}$ er et elektron bare "moderat relativistisk", så vi gjør bare en forholdsvis liten feil hvis vi regner ikke-relativistisk:

$$\lambda = h/p = h/\sqrt{2m_e K} = 6.626 \cdot 10^{-34} / \sqrt{2 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot 120 \cdot 10^3 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}} = 3.54 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 3.54 \text{ pm.}$$

Relativistisk beregning:

$$E^2 = (pc)^2 + (m_e c^2)^2 = (pc)^2 + E_0^2 \text{ og } E = E_0 + K \text{ gir } p = (1/c)\sqrt{E^2 - E_0^2} = 1.977 \cdot 10^{-22} \text{ kg m/s og}$$

$$\lambda = h/p = 3.35 \text{ pm.}$$

Begge metoder godtas på denne oppgaven.

c) Protonet har masse $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ og dermed hvileenergi $E_0 = m_p c^2 = 0.939 \text{ GeV}$. Med kinetisk energi $K = 2.50 \text{ GeV}$ er et proton derfor relativistisk. Fra $K = (\gamma - 1)m_p c^2$, med $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, finner vi $v = c \cdot \sqrt{1 - (1 + K/m_p c^2)^{-2}}$. Her er $m_p c^2 = 0.939 \text{ GeV}$ og $K = 2.50 \text{ GeV}$, slik at $v = c \cdot \sqrt{1 - 0.0745} = 0.962c$ eller $2.89 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$

d) Molekylmassen er (ca) 58u, slik at $\lambda = h/\sqrt{3mk_B T} = 6.626 \cdot 10^{-34} / \sqrt{3 \cdot 58 \cdot 1.661 \cdot 10^{-27} \cdot 1.381 \cdot 10^{-23} \cdot 300} = 1.915 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 19 \text{ pm.}$

e) Wiens forskyvningslov gir $\lambda = 2.90 \cdot 10^{-3} / 2.72548 \text{ m} = 1.06 \text{ mm.}$

f) Fotonenergien tilsvarer forskjellen i potensiell energi med spinn opp sammenlignet med spinn ned: $h\nu = 2\mu_z B$. Med $\nu = c/\lambda$ gir dette $\lambda = hc/2\mu_z B = 6.626 \cdot 10^{-34} \cdot 2.998 \cdot 10^8 / 2 \cdot 2.7928 \cdot 5.051 \cdot 10^{-27} \cdot 8.0 = 0.88 \text{ m} = 88 \text{ cm.}$

g) Hundts regel tilsier maksimalt elektronspinn med utgangspunkt i delvis fylte skall. Her har vi 3 elektroner i 3p-tilstander, dermed totalt elektronspinn 3/2.

h) $T_{\text{vib}} = h\nu/k_B \simeq 3000 \text{ K.}$

i) $T_{\text{rot}} = \hbar^2/Ik_B$. Tregghetsmomentet til CO er $I = 12u \cdot (16d/28)^2 + 16u \cdot (12d/28)^2 = 2.33 \cdot 10^{-46} \text{ kg}$, slik at $T_{\text{rot}} \simeq 3.5 \text{ K.}$

j) $T_{\text{trans}} = (E_2 - E_1)/k_B = (2^2 - 1^2)\pi^2 \hbar^2 / 2mL^2 k_B = 3\pi^2 \hbar^2 / 2mL^2 k_B \simeq 3 \text{ mK.}$

Oppgave 2. Operatorer. (Poeng: 15)

a)

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} e^{ikx} = \hbar k e^{ikx}.$$

Eigenverdien er $\hbar k$.

b) $\hat{L}_z = (\hbar/i)(x\partial/\partial y - y\partial/\partial x)$ slik at

$$\frac{\hbar}{i}(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})(x + iy) = \frac{\hbar}{i}(xi - y) = \hbar(x + iy).$$

Eigenverdien er $\hbar$.

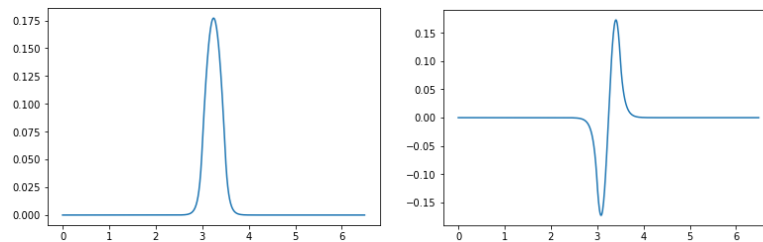
c) Både $\hat{p}_y$ og $\hat{H}$ inneholder kun konstanter og partiellderiverte mhp og y og x , ingen størrelser som ellers avhenger av y og x . Da spiller ikke rekkefølgen på de deriverte noen rolle, og de to kommuterer.

Oppgave 3. Ikke-stasjonær starttilstand for partikkel i boks. (Poeng: 5)

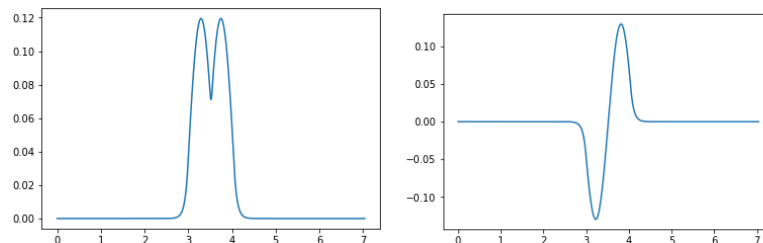
$$c_1 = \int_0^L \psi_1^*(x)\Psi(x, 0)dx = \frac{\sqrt{2}}{L} \int_0^L \sin(\pi x/L)dx = 2\sqrt{2}/\pi.$$

Oppgave 4. Endimensjonal modell for atom og toatomig molekyl. (Poeng: 10)

a) Grunntilstanden og 1. eksiterte tilstand i atomet:



Grunntilstanden og 1. eksiterte tilstand i molekylet:



b) Total energi for 2 atomer:

$$E(2A) = -8.07 \cdot 4 - 5.37 \cdot 2 = -43.02 \text{ eV}.$$

Total energi for 1 molekyl:

$$E(A_2) = -8.29 \cdot 2 - 7.93 \cdot 2 - 5.95 \cdot 2 = -44.34 \text{ eV}.$$

Bindingsenergien blir dermed 1.32 eV.

Oppgave 5. Krystaller og halvlederfysikk. (Poeng: 20)

a) Blochs teorem:

$$\psi(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

med u en funksjon med samme periodisitet som krystallen,

$$u(\mathbf{r} + \mathbf{R}_j) = u(\mathbf{r}).$$

Her er $\mathbf{R}_j$ en gittervektor, dvs en vektor fra et atom til et av de andre.

b) Vi har her i alt $6N$ elektroner, og med $2N$ tilstander i hvert bånd kan disse okkupere og fylle de 3 laveste energibåndene $E_1(k)$, $E_2(k)$ og $E_3(k)$. Dermed er krystallen ikke et metall, siden det er et endelig gap større enn null opp til nærmeste ledige tilstand. Båndgapet er energidifferansen mellom bunnen av ledningsbåndet, $E_4^{\min} = E_4(0) = 4C_4/5$, og toppen av valensbåndet, $E_3^{\max} = E_3(0) = 6C_3/5$. Innsetting av oppgitte tallverdier gir $E_g = 2$ eV. Da er krystallen en halvleder. (En isolator vil ha et båndgap på mer enn 3 eller 4 eV.)

c) Nær bunnen av ledningsbåndet kan vi skrive

$$E(k) = E_C + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e^*},$$

med en effektiv elektronmasse m_e^* . I denne modellen har vi

$$E_4(k) \simeq C_4(1 - (1/5)(1 - k^2 a^2/2)) = 4C_4/5 + C_4 k^2 a^2/10,$$

slik at

$$m_e^* = 5\hbar^2/C_4 a^2,$$

som med oppgitte tallverdier blir ca $0.26m_e$, der m_e er massen til et fritt elektron.

d) Lager p -type halvleder ved å dope med akseptoratomer som har ledig(e) tilstand(er) like over toppen av valensbåndet. Da er det lett å eksitere elektroner fra toppen av valensbåndet til disse ledige tilstandene, og dermed danne mange mobile hull i halvlederen. Dette vil gi en drastisk økning i elektrisk ledningsevne. Tilsvarende kan vi lage en n -type halvleder ved å dope med donatoratomer som har okkupert(e) tilstand(er) like under bunnen av ledningsbåndet. Disse kan lett eksiteres til ledningsbåndet og bli essensielt frie elektroner som gir økt ledningsevne.