

①

Forslag til løsning

Oppgave 1

a) Impulsbevarelse i støtet innebarer

$$mv = (m+M)v_e$$

$$v_e = \frac{m}{m+M} v.$$

Kinetisk energi etter støtet

$$K = \frac{1}{2} (m+M) v_e^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2}{m+M} v^2.$$

Etter støtet går kinetisk energi over til potensiell energi $U = (m+M)gh$

Med $U = K$ finner en dermed

$$(m+M)gh = \frac{1}{2} \frac{m^2}{m+M} v^2$$

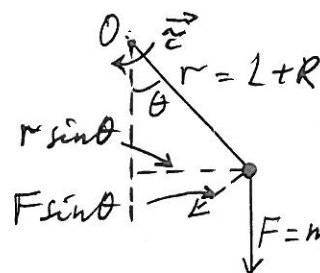
$$h = \frac{1}{2g} \left(\frac{m}{m+M} \right)^2 v^2.$$

b) Treghetsmomentet kan bestemmes med Steiners sats. Tyngdepunktet har avstanden $R+L$ fra opphengningspunktet og massen er $m_t = m+M$.

$$I_t = I_o + I = m_t r^2 + I = (m+M)(L+R)^2 + I.$$

Dreiemomentet er gitt ved (se fig. neste side)

$$\tau = r F \sin \theta = r (F \sin \theta)_{\text{eff}} = (r \sin \theta) F$$



$$\tau = (m+M)(L+R)g \sin \theta$$

$$\approx (m+M)(L+R)g \theta.$$

Newtons 2. lov for rotasjon gir

$$I_t \ddot{\theta} = -\tau = -(m+M)(L+R)g \theta.$$

Dette er likningen for en harmonisk oscillator ($\theta \rightarrow x$, $I_t \rightarrow m$, $(m+M)(L+R)g \rightarrow k$).

Sirkelfrekvensen blir dermed

$$\omega = \sqrt{\frac{(m+M)(L+R)g}{(m+M)(L+R)^2 + I_t}}.$$

Oppgave 2

a) Frekvensen bilen mottar ($u_r = v$, $u_s = 0$)

$$f_b = f_s \left(1 + \frac{v}{c} \right)$$

Frekvensen radaren mottar

$$f_r = f_b \left(1 + \frac{v}{c} \right) = f_s \left(1 + \frac{v}{c} \right)^2 = f_s \left(1 + \frac{2v}{c} \right)$$

Frekvensendring

$$\Delta f = f_r - f_s = f_s \frac{2v}{c} = 2 \frac{v}{\lambda}$$

der $f_s \lambda = c$.

②

Dette gir farten

(3)

$$v = \frac{1}{2} \lambda \cdot f = \frac{1}{2} 0,06 \text{ m} \cdot 800 \text{ s}^{-1} = \underline{\underline{24 \text{ m/s}}} = \underline{\underline{86,4 \text{ km/h}}}$$

b) Vinkelfrekvensen er $\omega = 2\pi f$.

Bølgehastigheten er $c = \frac{\omega}{k}$ slik at
bølgetallet blir

$$k = \frac{\omega}{c} = 2\pi \frac{f}{c} = 2\pi \cdot \frac{800 \text{ s}^{-1}}{250 \text{ m}} = \pi \cdot 0,48 \text{ m}^{-1} = \underline{\underline{1,51 \text{ m}^{-1}}}$$

Effekten er proporsjonal med kvadratet
av amplituden, dvs $P = \text{konst} \cdot A^2$. Følgelig

$$\frac{P}{A_1^2} = \frac{P_0}{A_0^2} (= \text{konst})$$

$$P A_0^2 = P_0 A_1^2$$

$$A_1 = A_0 \sqrt{\frac{P_1}{P_0}} = A_0 \sqrt{\frac{3,6 P_0}{P_0}} = \underline{\underline{1,90 A_0}}$$

Oppgave 3

(4)

a) Langs adiabatene gjelder

$$T_1 p_1^{(\gamma-1)/\gamma} = T_3 p_2^{(\gamma-1)/\gamma}$$

$$T_3 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 300 \text{ K} \cdot 5,0^{0,4/1,4} = \underline{\underline{475 \text{ K}}} = \underline{\underline{202^\circ \text{C}}}$$

Anvendt langs isotermer

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = R T_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = R T_1 \left| \ln V \right|_{V_1}^{V_2} = R T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$= -R T_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = -8,314 \text{ J/K} \cdot 300 \text{ K} \ln 5,0 = \underline{\underline{-4,0 \cdot 10^3 \text{ J}}}$$

Langs adiabatene er det ingen varme-
utveksling, dvs. $dQ = 0$. Entropiforskjellen
mellom punktene 3 og 1 er derfor

$$\Delta S_{31} = \underline{\underline{0}}$$

b) Tilført varmemengde mellom punktene
2 og 3 (ved konstant trykk)

$$Q_t = C_p (T_3 - T_1) = \frac{\gamma}{\gamma-1} R (T_3 - T_1)$$

Den avgitte varmen må være lik arbeidet langs
isotermer (da $Q = \Delta U + W$ og $\Delta U = 0$ for ideell gass
med $T = \text{konst}$). Følgelig

$$Q_a = \underline{\underline{W}} = - \frac{\gamma}{\gamma-1} R T_1 \ln \left(\frac{T_3}{T_1} \right)$$

Ved omkøp er indre energi uendret.

Nettoarbejd er derfor $W_n = Q_t + Q_a$

Virkningsgraden blir dermed

$$\eta = \frac{W_n}{Q_t} = 1 + \frac{Q_a}{Q_t} = 1 - \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1} R T_1 \ln \frac{T_3}{T_1}}{\frac{\gamma}{\gamma-1} R (T_3 - T_1)}$$

$$= \underline{\underline{1 - \frac{T_1}{T_3 - T_1} \ln \left(\frac{T_3}{T_1} \right)}}$$

Oppgave 4.

a) Spenning over motstanden: $V_R = RI$

Spennning over induktansen: $V_L = L \frac{dI}{dt}$

Differensiallikningen for I blir dermed

$$\underline{\underline{L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}}}$$

Løsningen er gitt ved

$$I = A + B e^{-t/\tau}$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{B}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Setter dette inn i differensiallikningen og får

$$-L \frac{B}{\tau} e^{-t/\tau} + RA + RB e^{-t/\tau} = \mathcal{E}$$

Dette skal holde for alle tider. Følgelig

$$AR = \mathcal{E}$$

$$A = \underline{\underline{\mathcal{E}/R}}$$

⑤

$$B(R - L/\tau) = 0$$

$$\tau = \underline{\underline{L/R}}$$

Grenselbetingsen $I(0) = 0$ innebærer $A+B=0$ slik at

$$B = -A = -\underline{\underline{\mathcal{E}/R}}$$

$$I(t) = \underline{\underline{\frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau})}}$$

b) Total strømstyrke innenfor radius $r < R$

$$I(r) = \int j(r) dA = \int_0^r j(u) \cdot 2\pi u du = \frac{2I_0}{\pi R^2} 2\pi \int_0^r \left[1 - \left(\frac{u}{R} \right)^4 \right] u du$$

$$= \frac{4I_0}{R^2} \left[\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{4} \frac{u^4}{R^2} \right]_0^r = \underline{\underline{I_0 \left[2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right]}}$$

Legger sirkel om sentrum og benytter Ampères lov der $I_i = I(r)$.

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_i$$

$$2\pi r B = \mu_0 I(r)$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \left[2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right], & r < R \\ \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}, & r > R. \end{cases}$$

⑥