

①

Forslag til løsning.

Oppgave 1

- a) Sentrjpetalakselerasjonen er gitt ved
 $a_r = (-v^2/r) = -\omega^2 r$ slik at kraft-
 balansen blir

$$F = G \frac{M_1 M_2}{r^2} = M_1 \omega^2 r.$$

Vinkelhastigheten for jordrotasjonen er så
 $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Satelittmassen M_1 kan forkortes bort, og ved
 innsetting for ω finner en så

$$\frac{GM_2}{r^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$GM_2 \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = r^3$$

$$r = \left[GM_2 \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \right]^{1/3} = \left[6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg} \right]^{1/3}$$

$$\times \left(\frac{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}}{2\pi}\right)^2 \Big]^{1/3} = 4,223 \cdot 10^7 = \underline{42230 \text{ km}}$$

Høyden over jordoverflata for geostasjonær
 satelitt

$$h = r - R = (42230 - 6370) \text{ km} = \underline{\underline{35860 \text{ km}}}.$$

- b) I høyeste og laveste punkt i banen ②
 beveger satelitten seg normalt på radien
 ut fra sentrum. Dermed har en $L = |\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}|$
 $= r p \sin \theta = r p = M_1 r v$ der v er hastig-
 heten til satelitten. ($\sin \theta = 1$ med $\theta = 90^\circ$).
 Bevarelse av dreieimpuls innebærer dermed
 $(L_1 = L_2)$

$$r_2 v_2 = r_1 v_1$$

slik at satelittens banehastighet i det laveste
 punktet blir

$$v_2 = v_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right) = v_1 \frac{h_1 + R}{h_2 + R} = 3470 \text{ m/s} \frac{25000 + 6370}{22000 + 6370}$$

$$= \underline{\underline{3840 \text{ m/s}}}.$$

Oppgave 2.

- a) Frekvensen bilen mottar ($u_r = v$, $u_s = 0$)

$$f_b = f_s \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

Frekvensen radaren mottar

$$f_r = f_b \left(1 + \frac{v}{c}\right) = f_s \left(1 + \frac{v}{c}\right)^2 \approx f_s \left(1 + \frac{2v}{c}\right)$$

Frekvensendring

$$\Delta f = f_r - f_s = f_s \frac{2v}{c} = 2 \frac{v}{\lambda}$$

der $f_s \lambda = c$.

Dette gir farten

③

$$v = \frac{1}{2} \lambda \cdot 4f = \frac{1}{2} 0,07 \text{ m} \cdot 700 \text{ s}^{-1} = 24,5 \text{ m/s} = \underline{\underline{88,2 \text{ km/h}}}$$

b) Den stående bølgen kan skrives som

$$y = A[\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)] = \underline{\underline{2A \sin kx \cos \omega t}}$$

Derivering gir så

$$y' = 2Ak \cos kx \cos \omega t$$

Ved $x=0$ er grensebetingelsen alltid oppfylt (dvs. $y=0$). Kravet $y'=0$ ved $x=L$ er oppfylt dersom

$$\cos kL = 0,$$

som har løsning

$$kL = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$k = k_n = \underline{\underline{\pi(n + \frac{1}{2}) \frac{1}{L}}}$$

der n er heltall (≥ 0).

Dersom kun det ene endepunktet ligger i ro må en ha $n=0$. Bølglengden til endike svingning er følgende

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_0} = \underline{\underline{4L}}$$

Oppgave 3.

④

a) Siden ikke all isen smelter, vil sluttemperaturen bli $T_s = 0^\circ\text{C}$. Avgitt varme fra vannet blir følgende

$$Q_v = C_v m_v (T_v - T_s)$$

der massen av 3,5 l vann er $m_v = 3,5 \text{ kg}$.

Oppfatt varme i isen blir tilsvarende

$$Q_{is} = C_{is} m_{is} (T_s - T_{is})$$

Forskjellen i varmemengde brukes til å smelte is slik at

$$Q_v - Q_{is} = L_{is} \Delta m_{is}$$

$$\Delta m_{is} = \frac{Q_v - Q_{is}}{L} = \frac{C_v m_v (T_v - T_s) - C_{is} m_{is} (T_s - T_{is})}{L}$$
$$= \frac{4,18 \text{ kJ/kg} \cdot 3,5 \text{ kg} \cdot 35 \text{ K} - 2,0 \cdot 2,5 \cdot 15 \text{ kJ}}{334 \text{ kJ/kg}} = \underline{\underline{1,3 \text{ kg}}}$$

b) For en ideell gass er indre energi uavhengig av temperaturen, dvs. $U(T, V) = U(T)$. Følgelig mellom punktene 1 og 2 på isoterme

$$\Delta U_{12} = U_2 - U_1 = \underline{\underline{0}}$$

Med ideell gass blir arbeidet

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = RT_2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT_2 \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = \underline{\underline{RT_2 \ln(V_2/V_1)}}$$

Da $\Delta U_{12} = 0$ blir tilført varme

(NB! T_1 og T_2 er ombyttet på gitt figur i forhold til oppgitt W_{34} .)

⑤

$$Q_t = \Delta U_{12} + W_{12} = W_{12}$$

Angitt varme blir tilsvarende

$$Q_a = W_{34} = - \frac{T_1}{T_2} W_{12} = - \frac{T_1}{T_2} Q_t$$

For et helt omløp er endring i indre energi lik 0
slik at netto arbeid blir $W_n = Q_t + Q_a$.

Virkningsgraden blir følgende

$$\eta = \frac{W_n}{Q_t} = \frac{Q_t + Q_a}{Q_t} = 1 + \frac{Q_a}{Q_t} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Oppgave 4.

a) Spenning over motstanden: $V_R = RI = R \frac{dQ}{dt}$.

Spennning over kapasitansen: $V_c = \frac{1}{C} Q$.

Differensiallikningen for Q blir dermed

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = \mathcal{E}$$

Løsningen er gitt ved

$$Q = A + B e^{-t/\tau}$$

$$\frac{dQ}{dt} = - \frac{B}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Setter dette inn i differensiallikningen og får

$$-R \frac{B}{\tau} e^{-t/\tau} + \frac{A}{C} + \frac{B}{C} e^{-t/\tau} = \mathcal{E}$$

Dette skal holde for alle tider. Følgelig

$$A/C = \mathcal{E}$$

$$A = C\mathcal{E}$$

⑥

$$B(-R/\tau + 1/C) = 0$$

$$\tau = RC$$

Grensebetingelsen $Q(0) = 0$ innebærer $A+B=0$
slik at

$$B = -A = -C\mathcal{E}$$

$$Q(t) = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/\tau})$$

b) Total strømstyrke innenfor radius $r < R$

$$\begin{aligned} I(r) &= \int \vec{j}(u) dA = \int_0^r j(u) \cdot 2\pi u du = \frac{3I_0}{\pi R^2} 2\pi \int_0^r \left[1 - \frac{u}{R}\right] u du \\ &= \frac{6I_0}{R^2} \left[\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{3} \frac{u^3}{R} \right]_0^r = I_0 \left[3 \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2 \left(\frac{r}{R}\right)^3 \right] \end{aligned}$$

Legger sirkel om sentrum og benytter Ampères
lov der $I_i = I(r)$

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_i$$

$$2\pi r B = \mu_0 I(r)$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \left[3 \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2 \left(\frac{r}{R}\right)^3 \right], & r < R \\ \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}, & r > R \end{cases}$$