

①

Forslag til løsning.

Oppgave 1

a) Akselerasjonen blir

$$a = a(t) = \dot{v} = -8v_0 e^{-\delta t} + v_1 \frac{6}{t_0} \left[\frac{t}{t_0} - \left(\frac{t}{t_0} \right)^2 \right]$$

Posisjonen blir

$$\begin{aligned} x = x(t) &= \int_0^t v dt' = \int_0^t \left\{ v_0 e^{-\delta t'} + v_1 \left[3 \left(\frac{t'}{t_0} \right)^2 - 2 \left(\frac{t'}{t_0} \right)^3 \right] \right\} dt' \\ &= \left[-\frac{v_0}{\delta} e^{-\delta t'} + v_1 t_0 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{t'}{t_0} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{t'}{t_0} \right)^4 \right] \right]_0^t \\ &= \frac{v_0}{\delta} (1 - e^{-\delta t}) + v_1 t_0 \left[\left(\frac{t}{t_0} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{t}{t_0} \right)^4 \right] \end{aligned}$$

Kjørt veitengde etter 8 s

$$x = \frac{10 \text{ m/s}}{0,125} (1 - e^{-0,12 \cdot 8,0}) + 150 \text{ m/s} \cdot 8,0 \text{ s} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 111 \text{ m}$$

b) Impulsbevarelse i støtet tilsier

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

Dette gir felles hastighet etter støtet

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{25 \cdot 8,0 + 45 \cdot 2,0 \text{ m/s}}{25 + 45} = 4,14 \text{ m/s}$$

Etter delvis uelastisk støt gjelder fremdeles impulsbevarelsen slik at

$$m_1 v_{1e} + m_2 v_{2e} = (m_1 + m_2) v$$

Eliminerer v_{2e} ved $v_{2e} - v_{1e} = v_r$ eller $v_{2e} = v_r + v_{1e}$ og finner

②

$$m_1 v_{1e} + m_2 (v_{1e} + v_r) = (m_1 + m_2) v$$

$$(m_1 + m_2) v_{1e} = (m_1 + m_2) v - m_2 v_r$$

$$v_{1e} = v - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_r = 4,14 \text{ m/s} - \frac{45}{25 + 45} 3,0 \text{ m/s} = 2,21 \text{ m/s}$$

$$v_{2e} = v_{1e} + v_r = (2,21 + 3,0) \text{ m/s} = 5,21 \text{ m/s}$$

c) Ved å benytte parallellaksseteoremet finnes treghetsmomentet til hver av skivene om rotasjonsaksen

$$I_R = \frac{1}{2} m_R R^2 + m_R r^2$$

Treghetsmomentet til stav med skiver blir
følgelig

$$I = I(t) = \frac{1}{3} m_s L^2 + 2 I_R = \frac{I_0 + I_1 r^2}{2}$$

$$\text{der } I_0 = \frac{1}{3} m_s L^2 + m_R R^2 \text{ og } I_1 = 2 m_R$$

Dreieimpulsen er gitt ved $L = I \omega$. Endring av denne er bestemt av dreiemomentet τ . En finner

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} (I_0 + I_1 r^2) \omega_0 = I_1 \omega_0 \frac{d}{dt} (r^2) = 2 I_1 \omega_0 r \frac{dr}{dt}$$

$$= 2 I_1 \omega_0 r \frac{d}{dt} (r_0 + r \sin(\Omega t)) = 2 I_1 \omega_0 r r \Omega \cos(\Omega t)$$

$$= 2 I_1 \omega_0 (r_0 + r \sin(\Omega t)) r \Omega \cos(\Omega t)$$

Oppgave 2.

(3)

a) Masse pr. lengdeenhet

$$\mu = \rho A = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = \underline{1,17 \text{ g/m}}$$

Bølgehastighet $c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ gir krafta

$$F = \mu c^2 = 1,17 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot (350 \text{ m/s})^2 = \underline{143 \text{ N}}$$

For grunnfrekvensen er strengen en halv bølglengde, dvs. $\lambda = 2L$, der λ er bølglengden. Videre er $c = \lambda f$ der f er frekvensen. Lengden L mellom endepunktene blir derfor

$$L = \frac{1}{2} \lambda = \frac{c}{2f} = \frac{350 \text{ m/s}}{2 \cdot 440 \text{ s}^{-1}} = \underline{39,8 \text{ cm}}$$

b) Bevegelseslikningen er gitt ved Newtons lov

$$m\ddot{x} = F = -kx - b\dot{x}$$

$$\underline{m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0}$$

Med den gitte x finner en for hastigheten ved derivering

$$\dot{x} = A e^{-\delta t} [-\delta \sin(\omega_d t + \varphi) + \omega_d \cos(\omega_d t + \varphi)]$$

Grensebetingelsene $x = x(0) = x_0$ og $\dot{x} = \dot{x}(0) = 0$ gir så likningene

$$x_0 = A \sin \varphi$$

$$0 = A(-\delta \sin \varphi + \omega_d \cos \varphi)$$

Av den siste likninga finner en for fasevinkelen φ $\tan \varphi = \omega_d / \delta$

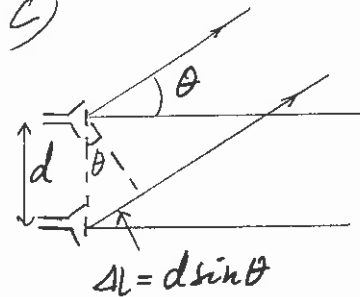
(4)

$$\varphi = \text{Arctg}\left(\frac{\omega_d}{\delta}\right) = \text{Arctg}(1,5) = \underline{56^\circ} (= 0,98 \text{ rad}),$$

som innsett i den første likninga gir

$$A = \frac{x_0}{\sin \varphi} = \frac{4,0 \text{ cm}}{\sin(56^\circ)} = \underline{4,8 \text{ cm}}$$

c)



Veiforskjell for de 2 bølgene

$$\Delta L = d \sin \theta$$

Det er konstruktiv interferens når veiforskjellen er et helt antall bølglengder λ . Følgelig

$$d \sin \theta = n \lambda, \text{ der } n \text{ er heltall}$$

Med $\lambda = \frac{c}{f}$ gir dette vinkelen θ bestemt ved

$$\sin \theta = \frac{n \lambda}{d} = \frac{n c}{f d} = n \cdot \frac{340 \text{ m/s}}{2,0 \text{ m} \cdot 400 \text{ s}^{-1}} = \underline{n \cdot 0,425}$$

$$\theta = \text{Arcsin}(n \cdot 0,425) = \begin{cases} 25^\circ, & n=1 \\ 58^\circ, & n=2 \end{cases}$$

Oppgave 3.

⑤

a) Siden ikke all isen smelter, vil sluttemperaturen bli $T_s = 0^\circ\text{C}$. Avgitt varme fra vannet blir følgende

$$Q_v = C_v m_v (T_v - T_s)$$

der massen av 3,5 l vann er $m_v = 3,5 \text{ kg}$.

Oppfatt varme i isen blir tilsvarende

$$Q_{is} = C_{is} m_{is} (T_s - T_{is})$$

Forskjellen i varmemengde brukes til å smelte is slik at

$$Q_v - Q_{is} = L_{is} \Delta m_{is}$$

$$\Delta m_{is} = \frac{Q_v - Q_{is}}{L_{is}} = \frac{C_v m_v (T_v - T_s) - C_{is} m_{is} (T_s - T_{is})}{L_{is}}$$

$$= \frac{4,18 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)} \cdot 4,5 \text{ kg} \cdot 42 \text{ K} - 2,0 \cdot 3,5 \cdot 18 \text{ kJ}}{334 \text{ kJ/kg}} = 1,99 \text{ kg} \approx \underline{\underline{2,0 \text{ kg}}}$$

b) Med ideell gass blir arbeidet

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = nRT_h \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT_h \ln V = \underline{\underline{nRT_h \ln(V_2/V_1)}}$$

Mellom punktene 3 og 4 er arbeidet tilsvarende

$$W_{34} = nRT_c \ln(V_1/V_2) = -nRT_c \ln(V_2/V_1) = -\frac{T_c}{T_h} W_{12}$$

For ideell gass er indre energi U uavhengig av volumet.

Følgelig er $\Delta U_{12} = U_1 - U_2 = 0$ og $\Delta U_{34} = 0$. Med

$Q = \Delta U + W$ finner en derfor tilført og avgitt varme

⑥

$$Q_h = W_{12} \text{ og } Q_c = -W_{34} = \frac{T_c}{T_h} W_{12}$$

(dersom $Q_c > 0$ er varme regnet positiv ut av systemet). For et helt omløp er endring i indre energi lik 0

slik at nett arbeid blir $W_h = Q_h - Q_c$.

Virkningsgraden blir følgende

$$\eta = \frac{W_h}{Q_h} = \frac{Q_h - Q_c}{Q_h} = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} = 1 - \frac{T_c}{T_h}$$

c) Oppvarmingen mellom punktene 4 og 1 skjer ved konstant volum slik at

$$Q_r = C_v (T_h - T_c)$$

Med $C_p = \gamma C_v = C_v + nR$ har en

$$C_v = \frac{nR}{\gamma - 1} = \frac{0,15 \text{ mol} \cdot 8,314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}}{1,4 - 1} = \underline{\underline{3,12 \text{ J/K}}}$$

slik at

$$Q_r = C_v (T_h - T_c) = 3,12 \text{ J/K} \cdot (410 - 40) \text{ K} = \underline{\underline{1,15 \text{ kJ}}}$$

Entropiendringen mellom punktene 4 og 1 bli så

$$\Delta S_{41} = \int dS = \int_{T_c}^{T_h} \frac{dQ}{T} = \int_{T_c}^{T_h} C_v \frac{dT}{T} = C_v \ln T = C_v \ln(T_h/T_c)$$

$$= 3,12 \text{ J/K} \cdot \ln\left(\frac{410 + 273}{40 + 273}\right) = \underline{\underline{2,43 \text{ J/K}}}$$