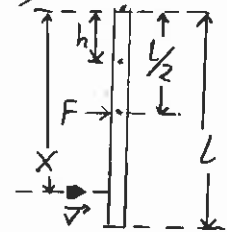


Forslag til løsning.

Oppgave 1

a)



Treghtetsmomentet om tyngdepunktet til staven er gitt ved

$$I_L = \frac{1}{12} ML^2$$

Aksen i avstand h fra enden har avstanden $\frac{L}{2} - h$

fra tyngdepunktet. Med Steiners sats blir da treghtetsmomentet

$$I_h = I_L + M\left(\frac{L}{2} - h\right)^2 = \frac{1}{12} ML^2 - MhL + Mh^2.$$

Dreiemomentet til krafta F

$$T = F\left(\frac{L}{2} - h\right)$$

Bevegelseslikningen for rotasjon

$$I_h \alpha = T$$

som gir vinkelakselerasjonen

$$\alpha = \frac{T}{I_h} = \frac{F\left(\frac{L}{2} - h\right)}{\frac{1}{12} ML^2 - MhL + Mh^2}.$$

b) Dreieimpulsen er gitt ved $\vec{L} = m(\vec{v} \times \vec{r})$.
Med $\vec{v} \perp \vec{r}$ blir dreieimpulsen til kula

$$L = \underline{\underline{m v x.}}$$

Når kula treffer er dreieimpulsen bevart. ②
Dreieimpulsen til bjelken etter at den er truffet er $L = I \omega$. Vinkelhastigheten blir dermed

$$I \omega = m v x$$

$$\omega = \frac{m v x}{\frac{1}{12} ML^2} = \frac{3 m v x}{ML^2} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 200 \text{ m/s} \cdot 1,0 \text{ m}}{2,5 \text{ kg} \cdot (1,2 \text{ m})^2}$$

$$= \underline{\underline{0,83 \text{ s}^{-1}}}.$$

c) Bevegelsesmengden til kula er $p = mv$. Denne overføres til bjelken som får bevegelsesmengden MV . ($m \ll M$) slik at

$$MV = mv$$

$$V = \frac{m}{M} v$$

når $F_s = 0$. Nå er V hastigheten til masse-
feltspunktet i avstand $\frac{L}{2}$ fra enden.
Dersom enden skal ligge i ro må dette
tilsvare en rotasjon med vinkelhastighet

$$\omega_1 = \frac{V}{\frac{L}{2}} = \frac{2 m v}{ML}.$$

Med $F_s = 0$ må en ha $\omega_1 = \omega$ slik at

$$\frac{2 m v}{ML} = \frac{3 m v x}{ML^2}$$

$$x = \underline{\underline{\frac{2}{3} L.}}$$

Oppgave 2.

a) Når massen henger i ro vil kraften fra fjæra motvirke tyngdekrafta slik at ($y=0$)

$$-a(-y_0) = Mg$$

$$y_0 = \frac{Mg}{a} = \frac{10 \text{ kg} \cdot 9.8 \text{ m/s}^2}{400 \text{ N/m}} = \underline{24.5 \text{ cm}}$$

Bevegelseslikningen er $M\ddot{y} = -ay - b\dot{y}$ (da ($ay_0 = Mg$)) slik at med $\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y$ har en

$$\delta = \frac{b}{2m} \quad \text{og} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{a}{m}}$$

b) Massen M starter i posisjonen $y = y_0$ med hastighet $\dot{y} = 0$. Med den gitte bevegelsen gir dette likningene (for $t=0$)

$$y = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \varphi) = A \cos \varphi = y_0$$

$$\dot{y} = [-\delta \cos(\omega_d t + \varphi) - \omega_d \sin(\omega_d t + \varphi)] Ae^{-\delta t}$$

$$= (-\delta \cos \varphi - \omega_d \sin \varphi) A = 0$$

Fra den siste likninga finner en så for vinkelen

$$\varphi \quad \tan \varphi = -\frac{\delta}{\omega_d} = -\frac{\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = -\frac{0.8 \omega_0}{\sqrt{1 - 0.8^2} \omega_0} = -\frac{4}{3}$$

$$\varphi = \underline{-53^\circ} (= -0.93 \text{ rad}).$$

(3)

Fra den første likninga finner en så for forholdet A/y_0

$$\frac{A}{y_0} = \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos(53^\circ)} = \underline{1.67}$$

$$[\text{Evt. } \frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} = \sqrt{1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{5}{3} \approx 1.67]$$

c) Bølgen kan beskrives ved

$$y = \underline{A \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) + \varphi \right]}$$

Ved tiden $t=0$ og posisjonen $x=0$ har en

$$y = y_1 = A \sin \varphi$$

Ved tiden $t=t_2$ har en så

$$y = y_2 = A \sin \left(-\frac{2\pi}{\lambda} c t_2 + \varphi \right)$$

Fra første likning finner en fasevinkelen

$$\sin \varphi = \frac{y_1}{A} = \frac{6.0}{12.0} = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \underline{30^\circ} = \underline{\frac{\pi}{6}} (< \frac{\pi}{2} \text{ rad}),$$

slik at

$$y_2 = 12.0 \text{ cm} \cdot \sin \left(-\frac{2\pi}{18 \text{ m}} 5 \text{ m/s} \cdot 3.0 \text{ s} + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= 12.0 \text{ cm} \sin \left(-\frac{3}{2}\pi \right) = \underline{12.0 \text{ cm}}$$

$$[-\frac{3}{2}\pi \text{ rad} = -270^\circ, \sin(-270^\circ) = \sin 90^\circ = 1.]$$

(4)

Oppgave 3

⑤

a) Smelting av isen og oppvarming av smeltevannet krever varmen eller energien

$$Q_{is} = m_{is} L + m_{is} C (T_s - T_0)$$

der $T_0 = 0^\circ\text{C}$ er smeltepunktet. Avgitt varme fra vannet er tilsvarende

$$Q_v = m_v C (T_v - T_s)$$

der massen av 3,5 l vann er $m_v = 3,5 \text{ kg}$.

Energibevarelse bestemmer da sluttemperaturen

$$m_{is} L + m_{is} C (T_s - T_0) = m_v C (T_v - T_s)$$

$$T_s = \frac{m_v C T_v + m_{is} (C T_0 - L)}{(m_{is} + m_v) C} =$$

$$\frac{(3,5 \cdot 35 + 0,5 \cdot 0) \cdot 4,18 - 0,5 \cdot 334}{(0,5 + 3,5) \cdot 4,18} ^\circ\text{C} = \underline{\underline{20,6^\circ\text{C} \approx 21^\circ\text{C}}}$$

b) Langs adiabaten gjelder

$$T_1 p_1^{(1-\gamma)/\gamma} = T_3 p_2^{(1-\gamma)/\gamma}$$

$$T_3 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 300 \text{ K} \cdot 5,0^{0,4/1,4} = \underline{\underline{475 \text{ K} = 202^\circ\text{C}}}$$

Arbeidet langs isotermer

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = RT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT_1 \left[\ln V \right]_{V_1}^{V_2} = RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$= 8,314 \text{ J/K} \cdot 300 \text{ K} \ln\left(\frac{1}{5,0}\right) = \underline{\underline{-4,0 \cdot 10^3 \text{ J}}}$$

Langs adiabaten er det ingen varme-utveksling, dvs. $dQ = 0$. Entropiforskjellen mellom punktene 3 og 1 er derfor

$$\Delta S_{31} = \underline{\underline{0}}$$

Den tilførte varmemengden mellom punktene 2 og 3 (ved konstant trykk)

$$Q_+ = C_p (T_3 - T_1) = \frac{\gamma}{\gamma-1} R (T_3 - T_1)$$

Den avgitte varmen må være like arbeidet langs isotermer (da $Q = \Delta U + W$ og $\Delta U = 0$ for ideell gass med $T = \text{konst}$). Følgelig

$$Q_- = W = - \frac{\gamma}{\gamma-1} R T_1 \ln\left(\frac{T_3}{T_1}\right)$$

Ved et omløp er indre energi uendret.

Netto arbeid er derfor $W_n = Q_+ + Q_-$.

Virkningsgraden blir dermed

$$\eta = \frac{W_n}{Q_+} = 1 + \frac{Q_-}{Q_+} = 1 - \frac{\frac{\gamma}{\gamma-1} R T_1 \ln\left(\frac{T_3}{T_1}\right)}{\frac{\gamma}{\gamma-1} R (T_3 - T_1)}$$

$$= \underline{\underline{1 - \frac{T_1}{T_3 - T_1} \ln\left(\frac{T_3}{T_1}\right)}}$$

⑥