

Forslag til løsning.

Oppgave 1

a) Sentripetalsakselerasjonen gir en stekkraft

$$F = m R \omega^2$$

der ω er vinkelhastigheten. Rotasjonsfrekvensen blir med dette ($1N = 1 \text{ kg m/s}^2$)

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{F}{mR}} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1500N}{0,5 \text{ kg} \cdot 0,30 \text{ m}} \right)^{1/2} = \underline{\underline{15,95 \text{ s}^{-1}}}$$

Da tyngdepunktet ligger i ro må summen av kreftene være lik 0, dvs. $F_2 = F_1$. Tilsvarende må dreiemomentet om f.eks. det venstre feste punkt være lik 0. Dreiemomentbalanse om dette punktet gir da

$$0 = L_1 F - L_2 F + F_2 L$$

$$F_1 = F_2 = \frac{L_2 - L_1}{L} F = \frac{(11,2 - 10,0) \text{ cm}}{30 \text{ cm}} 1500N = \underline{\underline{60N.}}$$

b) Hastighetskomponentene blir

$$v_{1x} = v_1 \cos \varphi_1 = 18 \text{ m/s} \cdot \cos 30^\circ = \underline{\underline{15,6 \text{ m/s}}}$$

$$v_{1y} = v_1 \sin \varphi_1 = 18 \text{ m/s} \cdot \sin 30^\circ = \underline{\underline{9,0 \text{ m/s}}}$$

$$v_{2x} = v_2 \cos \varphi_2 = 8 \text{ m/s} \cdot \cos 45^\circ = \underline{\underline{5,66 \text{ m/s}}}$$

$$v_{2y} = v_2 \sin \varphi_2 = 8 \text{ m/s} \cdot \sin(-45^\circ) = \underline{\underline{-5,66 \text{ m/s}}}$$

Ved delingen er impulsen bevart både i x- og y-retningen slik at (med $v_y = 0$)

$$0 = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y}$$

$$m_1 = -m_2 \frac{v_{2y}}{v_{1y}} = -2,4 \text{ kg} \cdot \frac{-5,66}{9,0} = \underline{\underline{1,51 \text{ kg}}}$$

og

$$(m_1 + m_2) v_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}$$

$$v_x = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2} = \frac{1,51 \cdot 15,6 + 2,4 \cdot 5,66}{1,51 + 2,4} \text{ m/s} = \underline{\underline{9,5 \text{ m/s}}}$$

c) I høyeste og laveste punkt i banen beveger satellitten seg normalt på radius ut fra sentrum. Dermed har en $L = |\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = r p \sin \theta = r p = m r v$ der m er massen og v er hastigheten til satellitten. (Vinkelen mellom vektorene er da $\theta = 90^\circ$). Bevarelse av dreieimpuls innebærer dermed ($L_1 = L_2$)

$$r_2 v_2 = r_1 v_1$$

slik at satellittens banehastighet i det høyeste punktet blir

$$v_2 = v_1 \frac{r_1}{r_2} = v_1 \frac{h_1 + D/2}{h_2 + D/2} = 3840 \text{ m/s} \cdot \frac{22000 + 12740/2}{25000 + 12740/2} = \underline{\underline{3470 \text{ m/s}}}$$

Oppgave 2

a) Når massen henger i ro vil krafta fra fjæra motvirke tyngdekrafta slik at ($y=0$)

$$-a(-y_0) = Mg$$

$$y_0 = \frac{Mg}{a} = \frac{10\text{kg} \cdot 9,8\text{m/s}^2}{400\text{N/m}} = \underline{\underline{24,5\text{cm}}}$$

Bevegelseslikningen er $M\ddot{y} = -ay - b\dot{y}$ (da $ay_0 = Mg$) slik at med $\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$ har en

$$\delta = \frac{b}{2M} \quad \text{og} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{a}{M}}$$

b) Massen M starter i posisjonen $y = y_0$ med hastighet $\dot{y} = 0$. Med den gitte bevegelsen gir dette for $t=0$ likningene

$$y = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \varphi) = A \cos \varphi = y_0$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= [-\delta \cos(\omega_d t + \varphi) - \omega_d \sin(\omega_d t + \varphi)] Ae^{-\delta t} \\ &= (-\delta \cos \varphi - \omega_d \sin \varphi) A = 0 \end{aligned}$$

Fra den siste likninga finner en for vinkelen

$$\varphi \quad \tan \varphi = -\frac{\delta}{\omega_d} = -\frac{\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = -\frac{0,8\omega_0}{\sqrt{1 - 0,8^2}\omega_0} = -\frac{4}{3}$$

$$\varphi = \underline{\underline{-53^\circ}} (= -0,93 \text{ rad}).$$

Fra den første likninga finner en så for forholdet A/y_0 ④

$$\frac{A}{y_0} = \frac{1}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos(53^\circ)} = \underline{\underline{1,67}}$$

$$[\text{Evt. } \frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} = \sqrt{1 + (-\frac{4}{3})^2} = \frac{5}{3} \approx 1,67.]$$

c) Vinkelfrekvensen er $\omega = 2\pi f$.

Bølgehastigheten er $c = \omega/k$ slik at bølgetallet blir

$$k = \frac{\omega}{c} = 2\pi \frac{f}{c} = 2\pi \frac{60\text{s}^{-1}}{250\text{m/s}} = \pi \cdot 0,48\text{m}^{-1} = \underline{\underline{1,51\text{m}^{-1}}}$$

Effekten er proporsjonal med kvadratet av amplituden, dvs. $P = \text{konst} \cdot A^2$. Følgelig har en

$$\frac{P}{A_1^2} = \frac{P_0}{A_0^2} (= \text{konst})$$

$$P A_0^2 = P_0 A_1^2$$

$$A_1 = A_0 \sqrt{\frac{P_1}{P_0}} = A_0 \sqrt{\frac{0,15 P_0}{P_0}} = \underline{\underline{0,39 A_0}}$$

Oppgave 3

⑤

a) Varmestrømmen gjennom isolasjonslaget er

$$I = \lambda A \frac{\Delta T}{\Delta x} = 0,010 \frac{\text{W}}{(\text{m} \cdot \text{K})} \cdot 0,20 \text{ m}^2 \cdot \frac{20 \text{ K}}{0,012 \text{ m}} = \underline{\underline{3,33 \text{ W}}}$$

Varmestrømmen brukes til å smelte is. Energi-balansen blir

$$L \Delta m = I \Delta t$$

der L er smeltevarmen og Δm er mengden smeltet is. Medgått tid for å smelte 50 g is blir da ($1 \text{ J} = 1 \text{ W} \cdot \text{s}$)

$$\Delta t = \frac{L \Delta m}{I} = \frac{334 \text{ J/g} \cdot 50 \text{ g}}{3,33 \text{ W}} \approx \underline{\underline{5010 \text{ s}}} = \underline{\underline{83,5 \text{ min}}}$$

b) Virkningsgraden er gitt ved

$$\varepsilon = \frac{W}{Q_2} = \frac{P \Delta t}{P_2 \Delta t} = \frac{P}{P_2}$$

der Δt er et tidsrom. Effekten som trengs til oppvarming blir følgende

$$P_2 = \frac{P}{\varepsilon} = \frac{200 \text{ MW}}{0,40} = \underline{\underline{500 \text{ MW}}}$$

Til kjøling i et tidsrom Δt trengs det en varmemengde Δm . Kjøleeffekten er gitt ved

$$P_1 = P_2 - P = (500 - 200) \text{ MW} = \underline{\underline{300 \text{ MW}}}$$

Energi balansen ved kjølingen blir da

⑥

$$c \cdot \Delta m (T_2 - T_1) = P_1 \Delta t$$

Nødvendig vannføring for kjøling blir dermed

$$\begin{aligned} \dot{Q} = \frac{\Delta m}{\Delta t} &= \frac{P_1}{c (T_2 - T_1)} = \frac{300 \text{ MW}}{4,18 \cdot 10^3 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} (32 - 20) \text{ K}} \\ &= \underline{\underline{5,98 \cdot 10^3 \text{ kg/s}}} \approx \underline{\underline{6,0 \text{ tonn/s}}} \end{aligned}$$

c) Avgitt varmeenergi som har gått til omgivelsene er gitt ved

$$\dot{Q} = C (T_1 - T_0)$$

Omgivelsene har hele tiden samme temperatur T_0 slik at entropiendringen der blir

$$\Delta S_0 = \frac{Q}{T_0} = C \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right)$$

For systemet vil temperaturen endre seg slik uttrykket for entropien blir

$$S = S(T) = \int dS = \int \frac{dQ}{T} = C \int \frac{dT}{T} = \underline{\underline{C \ln T (+ \text{konst})}}$$

Entropiendringen ved avkjøling blir dermed

$$\Delta S = S(T_0) - S(T_1) = C \ln T_0 - C \ln T_1 = \underline{\underline{C \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right)}}$$