

Forslag til løsning.

Oppgave 1

a) Massefellespunktet x er bestemt av

$$Mx = m \cdot \frac{L}{2} + 2m \cdot 0 \quad (M = m + 2m)$$

$$x = \frac{mL}{2M} = \frac{mL}{2(m+2m)} = \frac{1}{6}L.$$

Med de gitte uttrykkene blir treghetsmomentet om midtpunktet av den horisontale staven

$$I_{\text{tot}} = \frac{1}{3}mL^2 + \frac{1}{12}2m(2L)^2 = \frac{mL^2}{3}$$

$$(\text{Evt. } I_{\text{tot}} = \frac{1}{3}mL^2 + 2(\frac{1}{12}mL^2) = \frac{mL^2}{3})$$

Med Steiners setning har en så

$$I_{\text{tot}} = I_{\text{cm}} + Mx^2$$

slik at treghetsmomentet om massefellespunktet blir

$$I_{\text{cm}} = I_{\text{tot}} - Mx^2 = mL^2 - 3m(\frac{L}{6})^2 = \frac{11}{12}mL^2.$$

b) Dreieimpulsen er gitt ved $\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$.

Med $\vec{v} \perp \vec{r}$ blir dreieimpulsen til kula om midtpunktet til staven

$$L = \underline{\underline{mvh.}}$$

Bevegelsesmengden til kula er $p = mv$. ②
Denne overføres til lyelken som får bevegelsesmengden MV ($m \ll M$) slik at

$$MV = mv$$

$$V = \frac{m}{M}v.$$

Når kula treffer er dreieimpulsen bevart. Dreieimpulsen til lyelken etter at den er truffet er $L = I\omega$. Vinkelhastigheten blir dermed

$$I\omega = mvh$$

$$\omega = \frac{mvh}{I} = \frac{mvh}{\frac{1}{12}ML^2} = 12 \frac{mvh}{ML^2}.$$

c) Energien er bevart når satellitten beveger seg i banen slik at

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + V(r_2) = \frac{1}{2}mv_1^2 + V(r_1)$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - mg\frac{R^2}{r_2} = \frac{1}{2}mv_1^2 - mg\frac{R^2}{r_1}$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$v_2 = \left[v_1^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)\right]^{1/2}$$

$$= \left[(3400 \text{ m/s})^2 + 2 \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 (6.370 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \left(\frac{1}{29 \cdot 10^6 \text{ m}} - \frac{1}{32 \cdot 10^6 \text{ m}}\right)\right]^{1/2}$$

$$= \underline{\underline{3760 \text{ m/s.}}}$$

Oppgave 2.

(3)

a) Før passering er tonehøyden

$$f_f = f_s \frac{c + v_1}{c - v_2} = f_s \frac{c_f}{c - v_2}$$

Etter passering er tonehøyden

$$f_e = f_s \frac{c - v_1}{c + v_2} = f_s \frac{c_e}{c + v_2} = \frac{3}{4} f_f = \frac{3}{4} f_s \frac{c_f}{c - v_2}$$

Fra dette finner en

$$\frac{c_e}{c + v_2} = \frac{3}{4} \frac{c_f}{c - v_2}$$

$$4c_e(c - v_2) = 3c_f(c + v_2)$$

$$(4c_e - 3c_f)c = (4c_e + 3c_f)v_2$$

$$v_2 = \frac{4c_e - 3c_f}{4c_e + 3c_f} c = \frac{c - 7v_1}{7c - v_1} c$$

$$= \frac{340 - 7 \cdot 25}{7 \cdot 340 - 25} \cdot 340 \text{ m/s} = \underline{\underline{23,8 \text{ m/s}}} = \underline{\underline{86 \text{ km/time}}}$$

(der $c_f = c + v_1$, og $c_e = c - v_1$, er brukt).

b) Med den gitte x finner en forhastigheten ved derivering

$$\dot{x} = A e^{-\delta t} (-\delta \sin(\omega_d t + \varphi) + \omega_d \cos(\omega_d t + \varphi))$$

Grænsbetingelsene $x = x(0) = 0$ og $\dot{x} = \dot{x}(0) = v_0$ gir så likningene

$$0 = A \sin \varphi$$

$$v_0 = A(-\delta \sin \varphi + \omega_d \cos \varphi)$$

Fra den første likninga finner en for fasevinkelen φ

$$\sin \varphi = 0 \text{ eller } \varphi = \underline{\underline{0.}}$$

Den andre likninga gir så for A

$$A = \frac{v_0}{\omega_d \cos \varphi} = \frac{20 \text{ cm/s}}{5,0 \text{ s}^{-1}} = \underline{\underline{4,0 \text{ cm.}}}$$

Utsvinget når $\omega_d t = \frac{\pi}{2}$, dvs $\delta t = 0,5 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

$$x = A e^{-\delta t} \sin(\omega_d t) = 4,0 \text{ cm} \cdot e^{-\frac{\pi}{4}} \cdot 1 = \underline{\underline{1,82 \text{ cm.}}}$$

c) Den stående bølgen blir

$$p = A(\sin(kx - \omega t) + \sin(kx + \omega t)) \\ = 2A \sin(kx) \cos(\omega t).$$

Med dette blir $p(0, t)$ automatisk oppfylt mens for $x = L$ må en ha

$$\sin(kL) = 0$$

Dette betyr at tillette verdier på k blir

$$kL = \pi n \text{ eller } k = k_n = \underline{\underline{\frac{\pi}{L} n}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

4 punkter uten trykkvariasjon i pipa innebærer $n = 3$ som gir bølgelengden

$$\lambda = \lambda_3 = \frac{2\pi}{k_3} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{L} \cdot 3} = \underline{\underline{\frac{2}{3} L.}}$$

(4)

Oppgave 3

a) En har ved oppvarming

$$\alpha = \frac{1}{L} \frac{\Delta L}{\Delta T}$$

der L er lengden og ΔL er lengdeendringen.
Av dette finner en for temperaturendringen

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha} \frac{\Delta L}{L} = \frac{0,80 \text{ mm}}{1,7 \cdot 10^{-5} \text{ K} \cdot 40 \text{ cm}} = \underline{\underline{118 \text{ K}}}$$

Energi til oppvarmingen

$$Q = mc \cdot \Delta T = 5,4 \text{ kg} \cdot 0,387 \text{ J/g} \cdot \text{K} \cdot 118 \text{ K} = \underline{\underline{247 \text{ kJ}}}$$

Trykkoppenningen $\sigma = F/A$ som hindrer staven fra å endre lengde følger av

$$E = \frac{L}{\Delta L} \frac{F}{A} = \frac{L}{\Delta L} \sigma$$

$$\sigma = \frac{\Delta L}{L} E = \frac{0,80 \text{ mm}}{40 \text{ cm}} \cdot 1,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa} = \underline{\underline{2,2 \cdot 10^8 \text{ Pa}}}$$

b) Volumet V_2 er bestemt av

$$pV_1 = nRT_1 \quad \text{og} \quad pV_2 = nRT_2$$

$$\text{slik at} \quad V_2 = \frac{T_2}{T_1} V_1 = \frac{500}{300} 15 \text{ dm}^3 = \underline{\underline{25 \text{ dm}^3}}$$

Volumet V_3 er bestemt av adiabat-
likninga.

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_3^{\gamma-1}$$

$$T_2^{\frac{1}{\gamma-1}} V_2 = T_1^{\frac{1}{\gamma-1}} V_3$$

(5)

$$V_3 = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_2 = \left(\frac{500}{300} \right)^{\frac{1}{0,4}} \cdot 25 \text{ dm}^3 = \underline{\underline{90 \text{ dm}^3}} \quad (6)$$

Oppvarmingen skjer ved konstant trykk
slik at tilført varme blir

$$Q = C_p (T_2 - T_1) = \gamma C_v (T_2 - T_1) = \frac{\gamma}{\gamma-1} nR (T_2 - T_1)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} p_1 (V_2 - V_1) = \frac{1,4}{1,4-1} \cdot 1,5 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 (25-15) \text{ dm}^3 = \underline{\underline{17,5 \text{ kJ}}}$$

c) Endring av entropi er gitt ved

$$T ds = dU + p dV,$$

der endring av indre energi er gitt ved

$$dU = C_v dT$$

Med bruk av ideell gasslikning får en så

$$ds = \frac{1}{T} dU + \frac{p}{T} dV = C_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$$

Ved å integrere dette finner en så

$$S = S(T, V) = \underline{\underline{C_v \ln T + nR \ln V + \text{konstant}}}$$

(Konstantene A og B blir da $A = C_v$ og $B = nR$.)