

Kontakt under eksamen:
Dag Werner Breiby
Telefon 7359 3594 / 9845 4213

EKSAMEN TFY4115 FYSIKK
for MTEL og MTTK
5. desember 2008 kl 0900-1300
Bokmål

Hjelpemiddel C:

- Matematisk formelsamling
- Godkjent kalkulator, med tomt minne

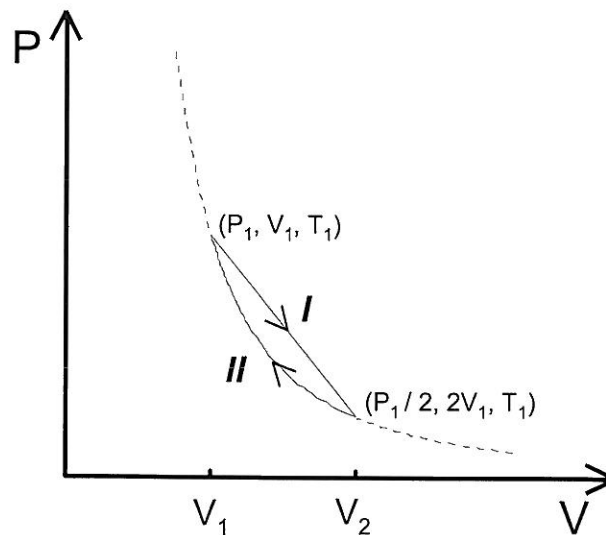
Oppgavesettet består av 3 oppgaver med til sammen 10 deloppgaver. Hver av disse teller 8 % til den endelige karakteren i faget. (De siste 20 % er gitt av midtsemesterprøven). Utlevert er 7 sider, hvorav 1 forside, 4 oppgavesider og 2 sider med formelsamling.

To generelle råd:

- Svar først på de spørsmålene som er de letteste for **deg**!
- Det er alltid bedre å svare **litt** enn ingenting på en besværlig deloppgave, noen poeng ekstra kan komme godt med!

Oppgavesettet er utarbeidet av Dag W. Breiby og sett gjennom av Eivind Hiis Hauge.

Oppgave 1 En ikke spesielt effektiv varmemaskin



En tottrinns reversibel prosess for en ideell gass består av *I*: en rett linje fra tilstanden (P_1, V_1, T_1) til tilstanden $(\frac{1}{2} P_1, 2V_1, T_1)$, og *II*: en isoterm kompresjon tilbake til utgangstilstanden, som vist i figuren.

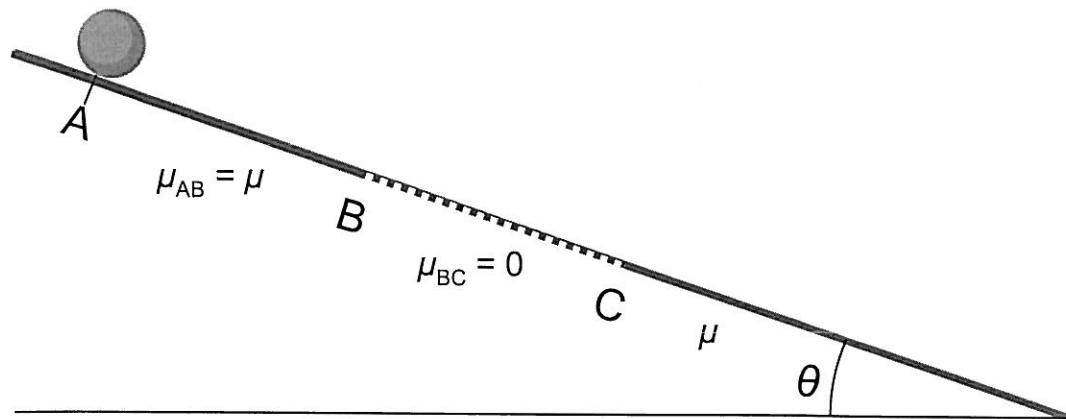
- a) Vis at trykket langs den rette linja kan beskrives ved

$$P(V) = -\frac{1}{2} \frac{P_1}{V_1} V + \frac{3}{2} P_1$$

Bruk dette til å vise at den maksimale temperaturen T_{varm} gassen får i løpet av prosessen er $T_{\text{varm}} = 9/8 T_1$.

- b) Finn arbeidet W utført av gassen per syklus. Hvor stor varmemengde Q_{varm} tilføres gassen i prosessstrinn I?
- c) Hva er virkningsgraden ε til denne varmekraftmaskinen? Hvis en Carnot-maskin hadde virket mellom de samme ekstremtemperaturene T_{varm} og T_1 , hvilken virkningsgrad ε_C ville den ha hatt?
- d) Beregn forskjellen i entropi i gassen mellom punktene (P_1, V_1, T_1) og $(\frac{1}{2} P_1, 2V_1, T_1)$. Hva er endringen av entropi i gassen for en *hel* syklus, og hva er endringen av entropi i omgivelsene?

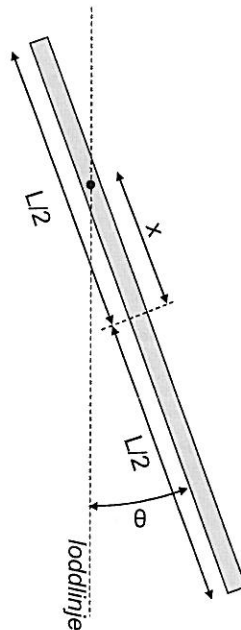
Oppgave 2 Ei kule som både ruller og sklir



Ei kompakt kule med masse m og radius r settes på et skråplan med helningsvinkel θ ved punktet merket A. Kula har i utgangspunktet A translasjonshastighet $v_A = 0$ m/s og rotasjonshastighet $\omega_A = 0$ rad/s, dvs. kula er i ro. Mellom punktene A og B, en distanse s , er friksjonskoeffisienten mellom kula og underlaget μ , som er tilstrekkelig stor til at kula ruller uten å skli.

- Hva er kulas akselerasjon a mellom A og B?
- Hva er kulas translasjonshastighet v_B og vinkelhastighet ω_B ved punktet B? Hva er kulas translasjonsenergi K og rotasjonsenergi K_{rot} i punktet B? Er den totale mekaniske energien kula hadde i A bevart?
- Mellom B og C er friksjonen 0, $\mu_{BC} = 0$. Finn kulas translasjonshastighet v_C og vinkelhastighet ω_C ved punktet C. Avstandene $AB = BC = s$. Beskriv kort og kvalitativt kulas videre bevegelse etter punktet C, hvor friksjonen igjen er lik $\mu = \mu_{AB}$. (Neglisjer forskjellen på statisk og kinetisk friksjon, $\mu = \mu_z = \mu_k$).

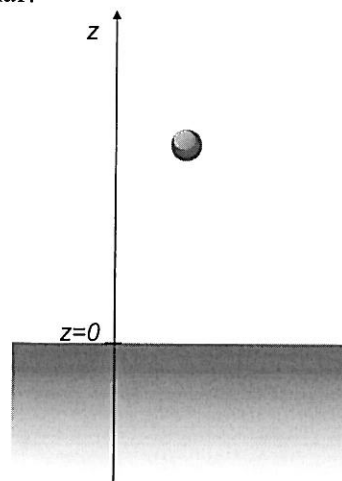
Oppgave 3 består av 3 uavhengige deloppgaver!



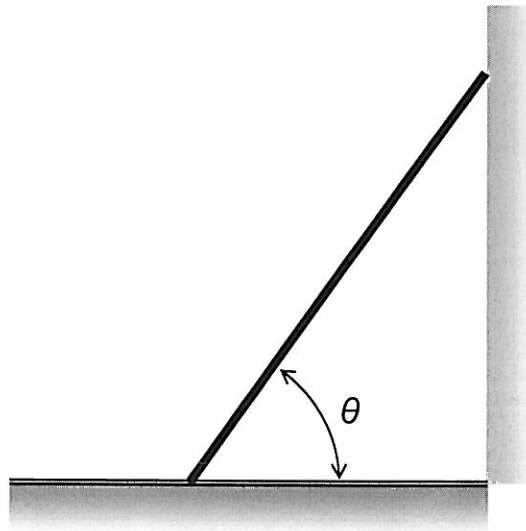
- a) **En pendel** består av en homogen tynn stav med lengde L . Den kan svinge fritt om en akse en avstand $x \in (0, L/2)$ fra bjelkens massepunkt. Vis at for små vinkelutslag θ blir pendelens periode

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{1}{12} \frac{L^2}{x} + x}$$

For hvilken x er T minimal?



- b) **En dykkende ball!** En ball med masse $m = 0.20$ kg og radius $r = 0.15$ m har høyden z i forhold til ei vannflate. Tettheten til vann er 1000 kg/m^3 , og tyngdens akselerasjon er 9.81 m/s^2 . La nullpunktet for ballens potensielle energi U være vannflata, altså $U(z=0) = 0$. Plott ballens *potensielle energi* som funksjon av høyden z i intervallet $z = -2\text{m}$ (dvs. under vann) til $z = 10$ m. (Neglisjer komplikasjoner med delvis neddykket ball, dvs. for $-r < z < r$). **NB:** Oppgaven spør *ikke* om ballens kinetiske energi!



- c) **En bjelke** er lent opp mot en glatt vegg (ingen friksjon mellom bjelke og vegg), med den ene enden hvilende mot gulvet, se figur. Det er en vinkel θ mellom bjelken og gulvet. Vis at friksjonskoeffisienten mellom bjelken og gulvet må være minimum $1/(2\tan \theta)$ for at bjelken ikke skal skli.

FormelsamlingVektorstørrelser er i **uthevet** skrift.**Fysiske konstanter:**

Ett mol: $M(^{12}\text{C}) = 12 \text{ g}$ $1 \text{ u} = 1.660538 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $N_A = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ $R = N_A k_B = 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

$c = 2.999724 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ $h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ $0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$ $g = 9.8 \text{ m/s}^2$

Mekanikk:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \text{ der } \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = m\mathbf{v} = m d\mathbf{r}/dt; \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a};$$

Konstant a : $v = v_0 + at$; $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$; $2as = v^2 - v_0^2$

$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$; $K = \frac{1}{2} mv^2$; $U(\mathbf{r}) = \text{potensiell en. (tyngde: } mgh; \text{ fjær: } \frac{1}{2} kx^2)$

$\mathbf{F} = -\nabla U$; $F_x = -\frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z)$; $E = \frac{1}{2} mv^2 + U(\mathbf{r}) + \text{friksjonsarbeid} = \text{konstant.}$

Tørr friksjon: $|F_f| = \mu_s \cdot F_\perp$ eller $|F_f| = \mu_k \cdot F_\perp$; Viskøs frksjon: $\mathbf{F}_f = -k_f \mathbf{v}$

Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F}$, der $\mathbf{r}_0$ er valgt referansepunkt; $dW = \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta}$

Statisk likevekt: $\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, $\sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{0}$

Massemiddelpunkt (tyngdepunkt): $\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$; $M = \sum_i m_i$

Elastisk støt: $\sum_i \mathbf{p}_i = \text{konstant}$; $\sum_i E_i = \text{konstant}$. Uelastisk støt: $\sum_i \mathbf{p}_i = \text{konstant}$.

Vinkelhastighet: $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{z}}$; $|\boldsymbol{\omega}| = \omega = d\theta / dt$; Vinkelakselerasjon: $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega} / dt$; $\alpha = d\omega / dt = d^2\theta / dt^2$.

Sirkelbevegelse: $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$; $v = r\omega$; Sentripetalakselerasjon $a_r = -v\omega = -v^2 / r = -r\omega^2$

Baneaks.: $a_\theta = dv / dt = r d\omega / dt = r\alpha$; Rotasjonsenergi: $K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I\omega^2$, der I er treghetsmomentet.

$I \equiv \sum_i m_i r_{\perp i}^2 \rightarrow \int_V dV \rho r_\perp^2$, der $r_{\perp i}$ er avstanden fra m_i til rotasjonsaksen. Med aksen gjennom massemiddelpunktet: $I \rightarrow I_0$.

Massiv kule: $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$; Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$; Kompakt sylinder / skive: $I_0 = \frac{1}{2} MR^2$;

Lang, tynn stav: $I_0 = \frac{1}{12} ML^2$; Parallellakseteoremet (Steiners sats): $I = I_0 + Mb^2$

Banespinn: $\mathbf{L}_{\text{bane}} = M(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{V}$, der $\mathbf{r}_0$ er felles referansepunkt for $\mathbf{L}$ og $\boldsymbol{\tau}$, og tyngdepunksbevegelsen er gitt av $\mathbf{R}$ og $\mathbf{V} = d\mathbf{R} / dt$. Egenspinn: $\mathbf{L}_{\text{egen}} = I_0 \cdot \boldsymbol{\omega}$

For (sylinder)symmetriske faste legemer: $\mathbf{L}_{\text{tot}} = \mathbf{L}_{\text{bane}} + \mathbf{L}_{\text{egen}}$; $\boldsymbol{\tau}_{\text{tot}} = d\mathbf{L}_{\text{tot}} / dt$

Hydrostatisk trykk: $P(h) = P_0 + \rho gh$; Bernoulli, langs strømlinje: $P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh = \text{konst.}$

Svingninger:

Udempet svingning: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$; $\omega_0 = \sqrt{k/m}$; $T = 2\pi/\omega_0$; $f_0 = 1/T = \omega_0/2\pi$

Pendel: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$; Fysisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{gmd/I}$; Matematisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{g/l}$

Dempet svingning: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$; $\gamma = b/2m$

Elektrisk analogi, LRC serie svingekrets: $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$; $\gamma = R/2L$

$\gamma < \omega_0$ Underkritisk dempet: $x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t - \delta)$; $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$\gamma > \omega_0$ Overkritisk dempet: $x(t) = A^+ e^{-\alpha^{(+)}t} + A^- e^{-\alpha^{(-)}t}$; $\alpha^{(\pm)} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Tvungne svingninger: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$, med partikulær løsning når $t \gg \gamma^{-1}$:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_d t - \delta); \quad x_0(\omega) = f_0 \left[\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \right]^{-1}; \quad \tan \delta = 2\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2)$$

Termisk fysikk:

n = antall mol; $N = nN_A$ = antall molekyler; f = antall frihetsgrader; $\alpha = l^{-1} dl/dT$

$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$; $C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$ (Varmekapasiteten kan være gitt pr. masseenhet eller pr. mol)

$$PV = nRT = Nk_B T; PV = N \frac{2}{3} \langle K \rangle; \langle K \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} m \langle v_x^2 \rangle; \Delta W = P \Delta V; W = \int_1^2 P dV$$

Størrelser pr mol: $C_V = \frac{1}{2} fR$; $C_P = \frac{1}{2} (f+2)R = C_V + R$; $dU = C_V \cdot dT$

For ideell gass: $\gamma = C_P / C_V = (f+2)/f$. Adiabat: $PV^\gamma = \text{konst.}$; $TV^{\gamma-1} = \text{konst.}$

Virkningsgrader for varmekraftmaskiner: $\varepsilon = W/Q_v$; Carnot: $\varepsilon = 1 - T_k/T_v$; Otto: $\varepsilon = 1 - 1/r^{\gamma-1}$

Kjøleskap: $\eta_K = \left| \frac{Q_k}{W} \right| \frac{\text{Carnot}}{T_v - T_k} \frac{T_k}{T_v - T_k}$; Varmepumpe: $\eta_{VP} = \left| \frac{Q_v}{W} \right| \frac{\text{Carnot}}{T_v - T_k} \frac{T_v}{T_v - T_k}$

Clausius: $\sum \frac{\Delta Q}{T} \leq 0$; $\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$; Entropi: $dS = \frac{dQ_{rev}}{T}$; $\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{dQ_{rev}}{T}$

Entropiendring $1 \rightarrow 2$ i en ideell gass: $\Delta S_{12} = nC_V \ln(T_2/T_1) + nR \ln(V_2/V_1)$

Varmedledning: $j_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$; $\mathbf{j} = -\kappa \nabla T$; $\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T$, $D_T = \kappa/(c\rho)$; $c\rho$ = varmekap. pr volum.

Stråling: $j_s = \frac{c}{4} u(T)$; $u(T) = \int_0^\infty \eta(f, T) df$; $\eta(f, T) = \frac{8\pi h f^3}{c^3} \frac{1}{\exp(hf/k_B T) - 1}$