

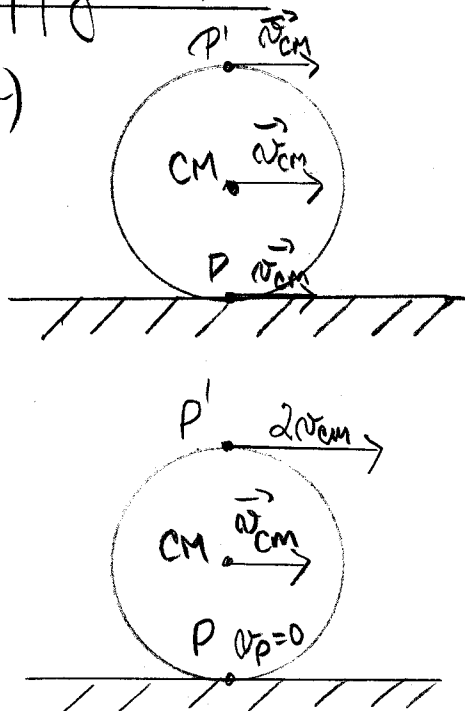
LØSNINGSFØRSLAG

ØKSAMEN HØST 2003

①

Oppgave 1

a)

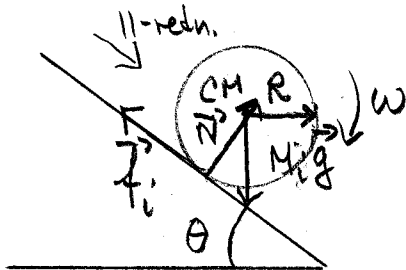


i. For en ren translasjonsbevegelse har vi ingen rotasjon, og alle 3 punktene beveger seg med hastighet $\vec{v}_{CM}$ parallell underlaget.

ii. I en ren rullebevegelse beveger CM seg med hastighet $\vec{v}_{CM}$, P' med hastighet $\vec{v}_{P'} = \vec{v}_{CM} + R\omega = 2\vec{v}_{CM}$

$\Leftrightarrow v_{CM} = R\omega$, men $v_P = 0$ da det er en ren rullebevegelse langs underlaget.

b)



Legemene har masse M_i og radius R . Velger positiv retning nedover langs skråplanet $\Rightarrow$ Pos. rotasjonsretning som angitt.

Translasjonsbevegelse av CM langs skråplanet:

$$\sum F_{||} = M_i g \sin \theta - f_i = M_i a_{CM} \quad (1)$$

$$\text{Rotasjon om CM: } I_{CM} \alpha = f_i R \quad (2)$$

$$\text{Rullebetingelsen: } v_{CM} = \omega R \quad ; \quad a_{CM} = R\alpha \quad (3)$$

(2) og (3) $\Rightarrow f_i = \frac{I_i^{CM}}{R^2} a_{CM}$

Innsatt i (1): $M_i g \sin \theta - \frac{I_i^{CM}}{R^2} a_{CM} = M_i a_{CM}$

$\Rightarrow a_{CM} \left(M_i + \frac{I_i^{CM}}{R^2} \right) = M_i g \sin \theta$

$$a_{CM} = \frac{g \sin \theta}{\left(1 + \frac{I_i^{CM}}{M_i R^2} \right)} \quad (4)$$

Av (4) ser vi at a_{CM} er uavh. av massen. a_{CM} avtar med økende I_i^{CM} . a_{CM} er konstant i bevegelsen.

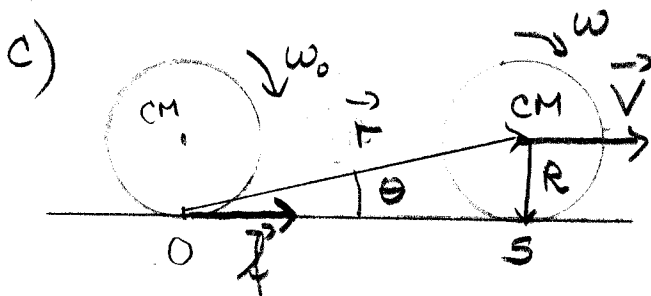
For kule: $a_{CM} = \frac{5}{7} g \sin \theta$

For massiv sylinder: $a_{CM} = \frac{2}{3} g \sin \theta$

For hul sylinder: $a_{CM} = \frac{1}{2} g \sin \theta$

$\Rightarrow$ Kule nå bunnen av skråplanet først, mens den hule sylinderen når bunnen sist.

$(I_{\text{kule}}^{CM} < I_{\text{massiv sylinder}}^{CM} < I_{\text{hul sylinder}}^{CM})$



Velger O som punktet der sylinderen settes ned på underlaget.

I det sylinderen settes ned på underlaget har den et spinn L_O om O: $\vec{L}_O = M \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} + \vec{L}_{CM}$

Da $\vec{v}_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = \vec{L}_{CM} = I_{CM} \vec{\omega}_0$

$L_O = I_{CM} \omega_0 = \frac{1}{2} M R^2 \omega_0$

I rullebevegelsen langs underlaget er spinnet bevart siden friksjonskraften f , som den eneste krafta langs underlaget, ikke har noen arm om O.

(3)

Spinnet bevart om O:

$$L'_0 = L_0$$

$$\vec{L}'_0 = M \vec{r} \times \vec{v}_{cm} + I_{cm} \cdot \vec{\omega}$$

$$L'_0 = MRV + \frac{1}{2} MR^2 \omega = MRV + \frac{1}{2} MRV = \frac{3}{2} MRV \text{ da } R = r \text{ og } \omega$$

$$L'_0 = \frac{3}{2} MRV = L_0 = \frac{1}{2} MR^2 \omega_0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V = \frac{R\omega_0}{3}}}$$

Så lenge sylinderen står er friksjonskrafta:

$$f = \mu N = \mu Mg = Ma \quad (\text{da } f \text{ er eneste kraft || underlaget})$$

$$\Rightarrow a = \frac{f}{M} = \mu g$$

Siden akselerasjonen er konstant har vi:

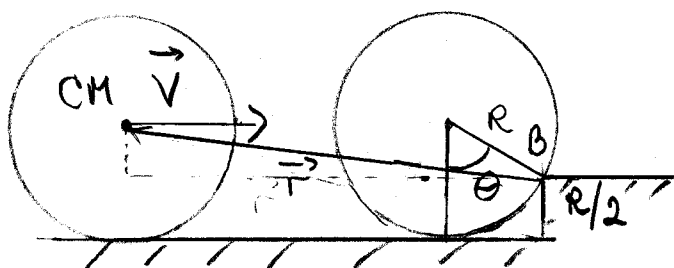
$$V^2 = 2as$$

$$\underline{\underline{s = \frac{V^2}{2a} = \frac{(\frac{R\omega_0}{3})^2}{2\mu g} = \frac{9 R^2 \omega_0^2}{18 \mu g}}}$$

Når vi har nådd nulling vil kontaktpunktet for sylinderen mot underlaget være i ro. Bevegelse med konst. V.

 $\Rightarrow$ Friksjonskrafta vil være null.

d)



Kanten av skinnnet over en kraft på sylinderen i støtet. Denne kraften har ikke noe dreiemoment om punktet B på kanten

av skinnnet $\Rightarrow$ Dreiemomentet om punktet B er bevart i støtet.

(4)

Spinnet til sylindere relativt B før støtet:

$$\vec{L}_B = M \cdot \vec{r} \times \vec{v}_{CM} + I_{CM} \cdot \omega$$

$$L_B = MVR \cos \theta + \frac{1}{2}MR^2\omega = MVR \cos \theta + \frac{1}{2}MRV$$

$$\underline{L_B = MVR(\cos \theta + \frac{1}{2}) = MVR} \quad \text{da } \cos \theta = \frac{1}{2}$$

Etter kollisjonen roterer sylindere om punktet B med spinnet:

$$L'_B = I_B \omega' = \underbrace{(I_{CM} + MR^2)}_{\text{parallelaks teorem}} \omega' = \frac{3}{2}MR^2\omega'$$

Bevaring av spinnet før og etter støtet gir:

$$L'_B = L_B = \frac{3}{2}MR^2\omega' = MVR$$

$$\underline{\omega' = \frac{2}{3} \frac{V}{R}}$$

Hastigheten til CM etter kollisjonen med kanten er da:

$$\underline{V' = R\omega' = \frac{2}{3}V}$$

Etter kollisjonen er energien bevart. Energien som kreves for akkurat å komme opp på kanten er

$$\frac{1}{2}I_B \omega'^2 = Mgh = Mg \frac{R}{2}$$

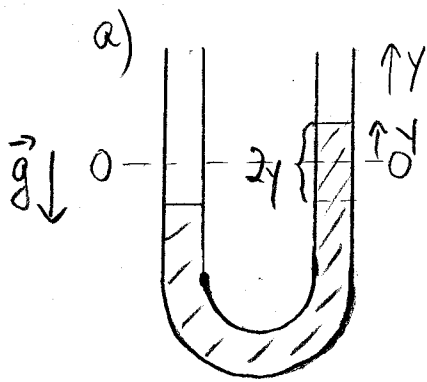
⇒ For at sylindere skal vippe helt opp over kanten må rotasjonsenergien $\geq$ pot. energi.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}MR^2 \right) \left(\frac{2}{3} \frac{V}{R} \right)^2 \geq Mg \frac{R}{2}$$

$$V^2 \geq \frac{3}{2}gR$$

$$\underline{\underline{V \geq \sqrt{\frac{3}{2}gR}}}$$

Oppgave 2



Krafta som trekker vaska enu mot likevektsposisjonen er til enhver tid:

$$F_g = -2Ay \cdot \rho \cdot g$$

når forskyvningen ut fra likevektsposisjonen er y som vist i figuren.

Newtons 2. lov:

$$\sum F_y = F_g + F_d = ma = m\ddot{y}$$

Her er $m = \rho \cdot A \cdot L$

$$\Rightarrow -2Ay \cdot \rho \cdot g - \alpha \cdot L \cdot \dot{y} = \rho AL \ddot{y}$$

Dette gir:
$$\ddot{y} + \frac{\alpha}{\rho \cdot A} \dot{y} + \frac{2g}{L} y = 0$$
 g. e. d.

med

$$\gamma = \frac{\alpha}{2\rho A} \quad \text{og} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

b) Underdempning: $y(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \delta)$ der $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ for $\gamma < \omega_0$

Kritisk demping: $y(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}$ for $\gamma = \omega_0$

Overdempning: $y(t) = Ae^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + Be^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$ for $\gamma > \omega_0$

Kritisk lengde:

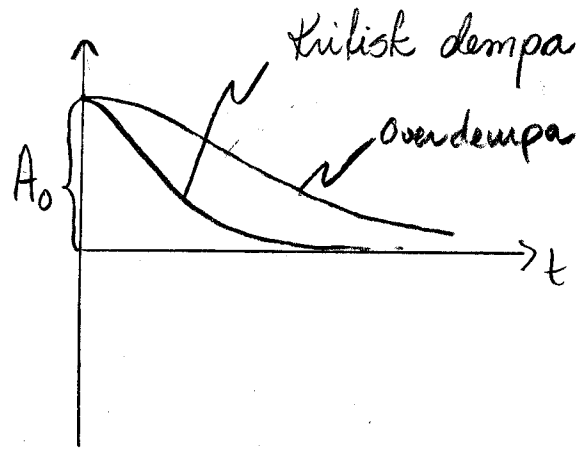
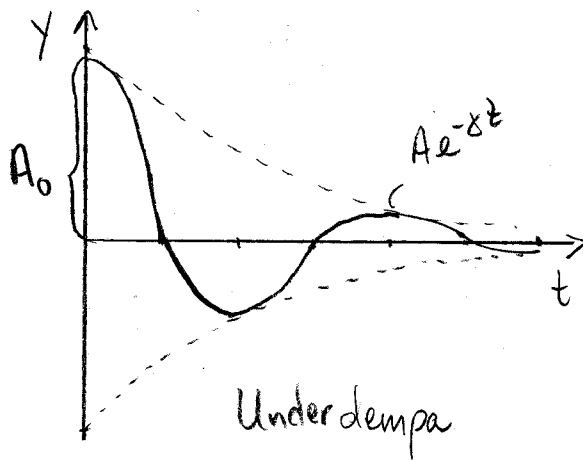
$$\gamma^2 = \omega_0^2$$

$$\frac{\alpha^2}{4\rho^2 A^2} = \frac{2g}{L_c}$$

$$L_c = \frac{8\rho^2 A^2 g}{\alpha^2}$$

(6)

$L < L_c$ gir underdamping ; $L > L_c$ gir overdamping



Insatt. tallverdi:

$$\underline{L_c} = \frac{8 \cdot (30 \cdot 10^{-5})^2 \cdot (1.00 \cdot 10^3)^2 \cdot 9.8}{(6.1 \cdot 10^{-2})^2} \text{ m} = \underline{19 \text{ m}}$$

Underdamping: $y(t) = A' e^{-\delta t} \cos(\omega t + \delta)$

Startbetingelse: $y(t=0) = A_0$ I

$v(t=0) = 0$ II

I: $y(t=0) = A' \cos \delta = A_0 \Rightarrow A' = A_0 / \cos \delta$

II: $v(t) = -\delta A' e^{-\delta t} \cos(\omega t + \delta) - \omega A' e^{-\delta t} \sin(\omega t + \delta)$

$v(t=0) = -\delta A' \cos \delta - \omega A' \sin \delta = 0$

$\Rightarrow \underline{\tan \delta = -\frac{\delta}{\omega} = -\frac{\delta}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}}$

$\underline{A' = A_0 \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}}$

(+ verdi da $A_0 > 0$)

c) Maks utslag finnes ved derivasjon.

Dette gir maks ved en tid t_0 og videre ved $t_0 + T$, $t_0 + 2T$ osv. der T = perioden til svingningen.

Forholdet mellom to maksimale utslag:

$$P = \frac{y(t_0 + T)}{y(t_0)} = \frac{Ae^{-\gamma(t_0 + T)} \cos[\omega(t_0 + T) + \delta]}{Ae^{-\gamma t_0} \cos[\omega t_0 + \delta]}$$

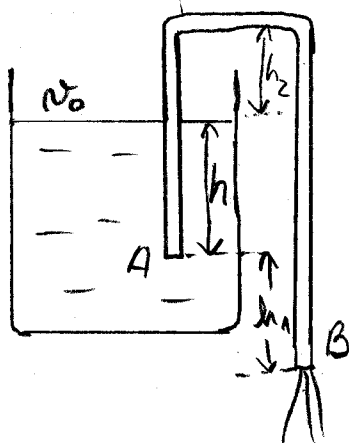
Da $\omega T = 2\pi$ får vi:

$$\underline{P = e^{-\gamma T} = e^{-\gamma 2\pi/\omega} = e^{-2\pi\gamma/\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}}$$

Med de oppgitte tallverdiene:

$$\underline{P = 0.23}$$

d)



Vi ser på en strømningstilstand fra overflata til B ved tiden t og kaller høyden over A ved dette tidspunktet for $h = h(t)$ ($h(t=0) = h_0$)

Velger punkt B som referansepunkt for høyden i strømningen.

Bernoullis likning gir da:

$$P_0 + \rho g(h + h_1) + \frac{1}{2} \rho v_0^2 = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

$$P_B = P_0 \quad \text{og} \quad v_0 \approx 0 \quad \text{da} \quad A_1 \gg A_2$$

⇒ Strømningshastigheten ved B:

$$v_B = \sqrt{2g(h + h_1)}$$

Hastigheten i B har sin maksimale verdi når $t=0$ og $h=h_0$:

$$v_{B, \max} = \sqrt{2g(h_0 + h_1)}$$

Hastigheten har sin minste verdi idet vaskenivået i tanken når punktet A $\Rightarrow h=0$

$$v_{B, \min} = \sqrt{2gh_1}$$

Vaskeshøyden ut av tanken gitt ved:

$$I_V = A_2 \cdot v_B = -A_1 \cdot \frac{dh}{dt} \quad \text{da } dh/dt < 0$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{A_2}{A_1} \sqrt{2g(h + h_1)}$$

$$\frac{dh}{\sqrt{2g(h + h_1)}} = -\frac{A_2}{A_1} dt$$

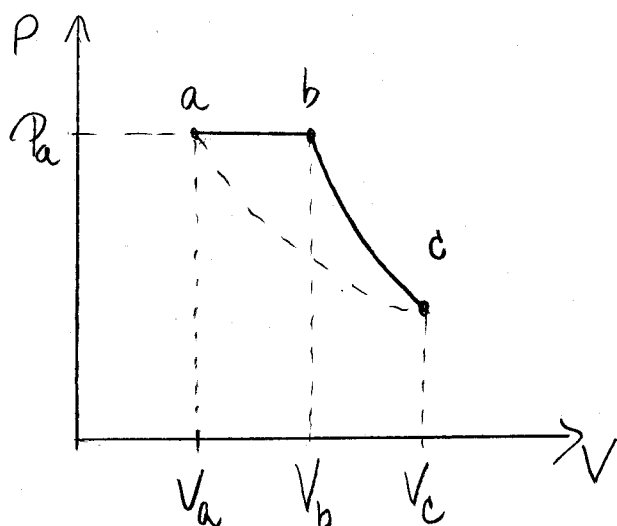
$$\int_{h_0}^0 \frac{dh}{\sqrt{2g(h + h_1)}} = -\frac{A_2}{A_1} \int_0^{t_0} dt$$

$$2 \cdot \frac{1}{2g} \left[\sqrt{2g(h + h_1)} \right]_{h_0}^0 = -\frac{A_2}{A_1} t_0$$

$$t_0 = \frac{A_1}{A_2 g} \left[\sqrt{2g(h_0 + h_1)} - \sqrt{2gh_1} \right]$$

(9)

Oppgave 3



a) Tilstandslikninger:

$$PV = 2RT \quad \text{da } n=2$$

$$\underline{V_b = 2V_a} \quad ; \quad \underline{P_b = P_a}$$

$$P_b V_b = 2RT_b \Rightarrow \underline{T_b = 2T_a}$$

$$\underline{T_c = T_a}$$

Adiabatisk prosess mellom b og c:

$$T_c V_c^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1}$$

$$V_c^{\gamma-1} = \frac{T_b}{T_c} V_b^{\gamma-1} = \frac{2T_a}{T_a} (2V_a)^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \underline{V_c = 2V_a \cdot 2^{\frac{1}{\gamma-1}}} = 2V_a \cdot 2^{\frac{3}{2}} = \underline{V_a \cdot 4\sqrt{2}}$$

$$P_c V_c = 2RT_c \Rightarrow \underline{P_c = \frac{2RT_a}{4\sqrt{2}V_a} = \frac{P_a}{4\sqrt{2}}}$$

Endring i indre energi:

$$\Delta U_{a-b} = c'_v \cdot n \Delta T_{ab}$$

$$c'_v = \frac{3}{2}R \quad \text{for } \gamma = \frac{5}{3}$$

$$\underline{\Delta U_{a-b} = \frac{3}{2}R \cdot 2(T_b - T_a) = 3RT_a}$$

$$\underline{\Delta U_{b-c} = c'_v \cdot n \Delta T_{bc} = -\Delta U_{ab} = -3RT_a}$$

Da temperaturen i a og c er den samme har vi ingen endring i indre energi idet vi går fra a til c siden $U = U(T)$.

b)

Tilført varme:

Prosess skinner b-c adiabatisk $\Rightarrow Q_{bc} = 0$

Prosesser fra a til b er ved konstant tryk:

$$Q_{ab} = c_p' \cdot n \Delta T = (c_v' + R) n \Delta T$$

$$\underline{Q_{ac} = Q_{ab} = \frac{5}{2} R \cdot 2 (T_b - T_a) = 5 R T_a}$$

Arbeid utført av gassen:

$$\underline{W_{ab} = \int_{V_a}^{V_b} P_a dV = P_a (V_b - V_a) = P_a V_a = 2 R T_a}$$

$$\underline{W_{bc} = -\Delta U_{bc} = 3 R T_a}$$

$$\underline{W_{abc} = W_{ab} + W_{bc} = 5 R T_a}$$

(Konsistent med $\Delta U_{abc} = 0$)

c)

Virkningsgrad $\epsilon = \frac{W_{netto}}{Q_{tilført}}$ Tilført varme: $\underline{Q_{abc} = 5 R T_a}$

Arbeid utført på gassen i prosessen c-a:

$$W_{ca} = \int_{V_c}^{V_a} P dV = \int_{V_c}^{V_a} 2 R T_a \frac{dV}{V} = 2 R T_a \ln(V_a/V_c)$$

$$W_{ca} = 2 R T_a \ln \frac{V_a}{V_a \cdot 2^{5/2}} = -2 R T \cdot \frac{5}{2} \ln 2$$

Netto arbeid pr syklus:

$$\underline{W_{syklus} = 5 R T_a - 5 R T_a \ln 2 = 5 R T_a (1 - \ln 2)}$$

⇒ Virkningsgrad: $\varepsilon = \frac{5RT_a(1 - \ln 2)}{5RT_a}$

(11)

$\varepsilon = 0,31$

Virkningsgrad for Carnot prosess som opererer mellom de samme temperaturene:

$\varepsilon_{\text{carnot}} = 1 - \frac{T_a}{T_b} = 1 - \frac{T_a}{2T_a} = 0,50$

d) Endring i entropi gitt ved:

$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T}$

For prosessen a-b, isobar:

$\Delta S_{ab} = \int_{T_a}^{T_b} \frac{dQ}{T} = \int_{T_a}^{T_b} \frac{c_p' \cdot n dT}{T} = c_p' \cdot n \ln \frac{T_b}{T_a}$

$\Delta S_{ab} = \frac{5}{2}R \cdot 2 \ln \frac{2T_a}{T_a} = 5R \ln 2$

For den adiabatiske prosessen b-c: $dQ_{\text{rev}} = 0$

⇒ $\Delta S_{bc} = 0$

For den isoterme prosessen:

$\Delta S_{ca} = \int_{V_c}^{V_a} \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_a} \int_{V_c}^{V_a} P dV$ da $dQ = dW$ for en isoterm prosess

$\Delta S_{ca} = \frac{1}{T_a} \cdot W_{ca} = \frac{1}{T_a} (-5RT_a \ln 2)$

$\Delta S_{ca} = -5R \ln 2$

Når vi gjennomløper den reversible syklusen er

$$\Delta S_{\text{system}} = 0$$

En tilstandsvariabel er kun avhengig av det punktet vi ser på i PV diagrammet og er uavh. av hvilken prosess som gav denne tilstanden.

Når vi gjennomløper en vilkårlig syklus og endrer opp i starttilstanden vil en tilstandsvariabel igjen ha samme verdi som i starttilstanden. Entropien har denne egenskapen og er derfor en tilstandsfunksjon.