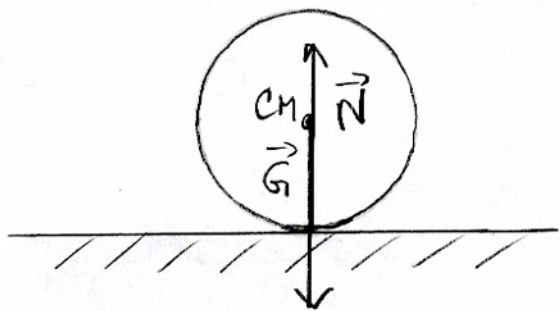


LØSNINGSFORSLAG

①

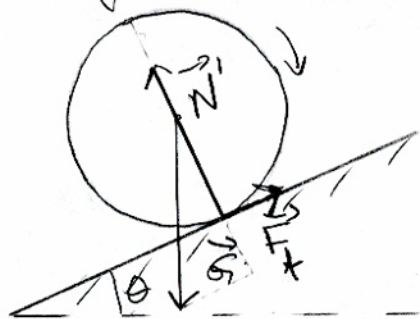
KONT AUG 2004 - TFX 4115 FYSIKK

Oppgave 1



Mens kula ruller på det horisontale underlaget virker tyngdekrafta $\vec{G}$ og normalkrafta fra underlaget på kula $\vec{N}$. Disse to er like store og motsatt retta.

Det virker ingen friksjonskrafta da vi har konstant vinkelhastighet. En friksjonskraft ville ha hatt et dreiemoment om CM og bidratt til å øke vinkelhastigheten på kula.

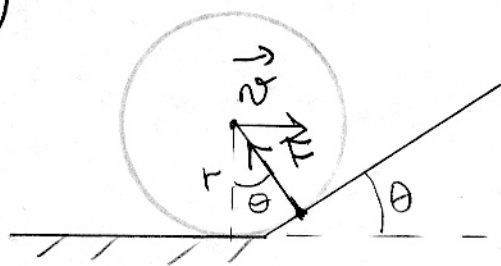


Når kula ruller på skråplanet virker tyngdekrafta $\vec{G}$ som over. Normalkrafta $\vec{N}'$ er normalt skråplanet og er nå $|\vec{N}'| = G \cos \theta$ ($|\vec{N}'| < |\vec{N}|$)

Det virker nå en friksjonskraft $\vec{F}_f$ oppover langs skråplanet, som forhindrer at kula sklir nedover skråplanet og som gir dreiemoment om CM og reduksjon av vinkelhastigheten til kula.

I størrelse er $|\vec{F}_f| < G \sin \theta$ da kula eller hvert bremses opp, stopper og ruller ned igjen fra skråplanet.

b)



Kula kolliderer med
skråplanet i B. Krafta
F i støtøyeblikket har
ikke noe dreiemoment om

②

B. Spinnet om B er
derfor bevart i støtet. (Pullebetingelsene
er oppfylt $v_0 = r\omega_0$; $v_1 = r\omega_1$)

Spinnet om B: $\vec{L}_B = M\vec{R} \times \vec{V} + \vec{L}_{CM}$

der V er hastigheten til massemidtpunktet
CM og $\vec{R}$ avstand fra CM til punkt B.

$$L_{CM} = I_{CM} \cdot \omega_1 = \frac{2}{3}mr^2\omega$$

På det horisontale underlaget:

$$\begin{aligned} L_{B,0} &= m \cdot v_0 \cdot r \cos \theta + \frac{2}{3}mr^2\omega_0 \\ &= mr^2\omega_0 \cos \theta + \frac{2}{3}mr^2\omega_0 \\ &= mr^2 \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \right) \omega_0 \end{aligned}$$

På skråplanet: $L_{B,1} = m v_1 r + \frac{2}{3}mr^2\omega_1 = mr^2\omega_1 + \frac{2}{3}r \cdot m v_1$

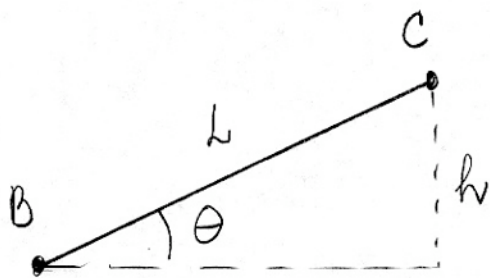
$$L_{B,1} = \frac{7}{5}mr^2\omega_1$$

Konservering av spinnet gir: $L_{B,0} = L_{B,1}$

$$mr^2 \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \right) \omega_0 = \frac{7}{5}mr^2\omega_1$$

$$\underline{\underline{\omega_1 = \frac{5}{7} \left(\cos \theta + \frac{2}{3} \right) \omega_0}} \quad \text{q.e.d.}$$

- c) For bevegelsen langs skråplanet er energien bevart siden kula ikke sklir. Startposisjon B og stopposisjon C



Definerer nullpkt. for pot. energi i B:

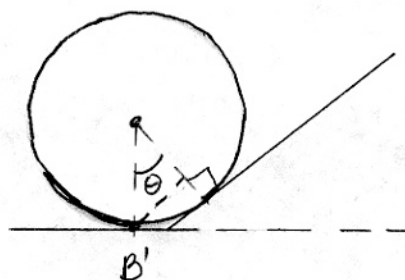
$$E_B = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega_1^2$$

$$E_C = mgh = mg \frac{L}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow E_B = E_C = \frac{1}{2} m r^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m r^2 \omega_1^2 = mg \frac{L}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \frac{7}{10g} \cdot r^2 \omega_1^2 \sin \theta}}$$

d)



Når kula treffer det horisontale underlaget igjen. Umiddelbart før støtet har vi $v_1 = r \omega_1$. I støtet

er spinnnet om B' bevart

$$L_{B'} = m v_1 r \cos \theta + I_{cm} \omega_1 = m v_2 r + I_{cm} \omega_2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega_2 = \frac{5}{7} \left(\cos \theta + \frac{2}{5} \right) \omega_1 = \frac{25}{49} \left(\cos \theta + \frac{2}{5} \right)^2 \omega_0}}$$

Oppgave 2

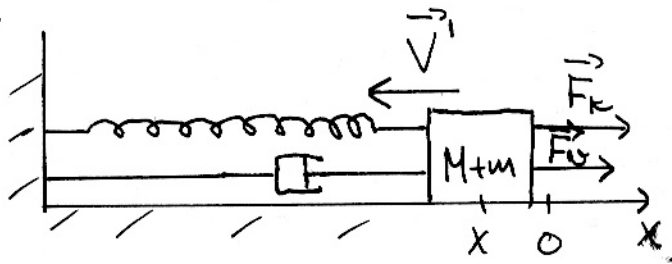
- a) i. Bevaring av bevegelsesmengde før og etter støtet:

$$m v_0 + M \cdot 0 = (m+M) V$$

$$\underline{\underline{V = \frac{m v_0}{(m+M)}}}$$

(4)

ii



Fra figuren:

Newtons 2. lov

$$\Sigma F = F_k + F_v = (M+m)a$$

$$\Rightarrow (M+m)\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

$$\Rightarrow \text{Diff. likn. } \underline{\underline{(M+m)\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0}}$$

iii.

Løsning av diff. likn. $x(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \delta)$ Fra diff. likn. $\gamma = \frac{b}{2(M+m)}$ (sammenligner. $m \rightarrow M+m$)

$$\underline{V} = \frac{10 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 400 \text{ m/s}}{(1,00 + 100 \cdot 10^{-3}) \text{ kg}} = \underline{3,96 \text{ m/s}}$$

Startbetingelser:

$$\text{I } x(t=0) = 0 = A \cos \delta \Rightarrow \cos \delta = 0 \Rightarrow \delta = \pm \pi/2$$

$$\text{II } \dot{x}(t) = -\omega' A e^{-\gamma t} \sin(\omega' t + \delta) - \gamma A e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \delta)$$

$$\dot{x}(t=0) = -V = -\omega' A \sin \delta \quad \text{da } \cos \delta = 0$$

$$\text{Da } A > 0 \text{ og } \omega' > 0 \text{ må } \sin \delta > 0 \Rightarrow \sin \delta = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\delta = \pi/2}}$$

$$\underline{\omega_0} = \sqrt{\frac{k}{M+m}} = \sqrt{\frac{200 \text{ N/m}}{1,010 \text{ kg}}} = \underline{14,1 \text{ s}^{-1}}$$

$$\underline{\gamma} = \frac{b}{2(M+m)} = \frac{14,2 \text{ Ns/m}}{2(1,010 \text{ kg})} = \underline{7,03 \text{ s}^{-1}}$$

$$\underline{\omega'} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{14,1^2 - 7,03^2} \text{ s}^{-1} = \underline{12,2 \text{ s}^{-1}}$$

$$\text{Fra II : } \dot{x}(t=0) = -V = -\omega' A$$

$$\Rightarrow \underline{A} = \frac{V}{\omega'} = \frac{3,96 \text{ m/s}}{12,2 \text{ s}^{-1}} = \underline{0,325 \text{ m}}$$

(5)

b) i. Max utslag blir 1. negative max (0: min)

Max/min for:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -\gamma A e^{-\gamma t} \sin(\omega' t + \delta) - A \gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \delta) = 0$$

Da $A \neq 0$ og $e^{-\gamma t} \neq 0$

$$\Rightarrow -\gamma \cos(\omega' t_1 + \delta) - \omega' \sin(\omega' t_1 + \delta) = 0$$

$$\Rightarrow \tan(\omega' t_1 + \delta) = -\gamma/\omega' = -\frac{7,03}{12,2} = -0,576$$

$$\Rightarrow \omega' t_1 + \delta = 150^\circ + n \cdot 180^\circ$$

Første verdi ($n=0$): $\omega' t_1 + \delta = 150^\circ \Rightarrow \omega' t_1 = 60^\circ = \pi/3$

$$\Rightarrow x(t_1) = A e^{-\gamma t_1} \cos(\omega' t_1 + \delta) < 0 \quad \text{0: 1. minimum.}$$

Maksimalt utslag fra likevektposisjonen; $x_{\min}$:

$$x_{\min} = A e^{-\gamma t_1} \cos(\omega' t_1 + \delta)$$

$$\underline{x_{\min}} = A e^{-\frac{\gamma}{\omega'} t_1 \omega'} \cos(150^\circ) = \underline{\underline{-0,154 \text{ m}}}$$

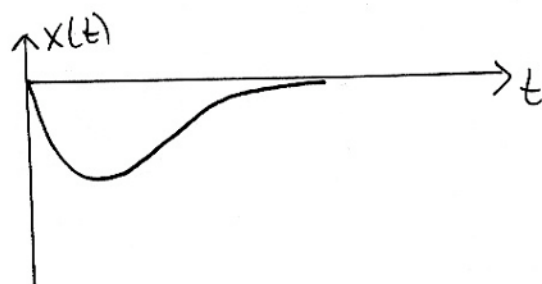
$$\text{ii. } \frac{x_{\max}(t)}{x_{\max}(t+T/2)} = \left| \frac{A e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \delta)}{A e^{-\gamma(t+T/2)} \cos[\omega'(t+T/2) + \delta]} \right|$$

$$T/2 = \frac{2\pi}{\omega'} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{\omega'} \Rightarrow \cos[\omega'(t+T/2) + \delta] = \cos(\omega' t + \pi + \delta) = -\cos(\omega' t + \delta)$$

$$\Rightarrow \frac{x_{\max}(t)}{x_{\max}(t+T/2)} = e^{\gamma T/\omega'} = e^{7,03 \cdot \frac{\pi}{12,2}} = \underline{\underline{6,11}}$$

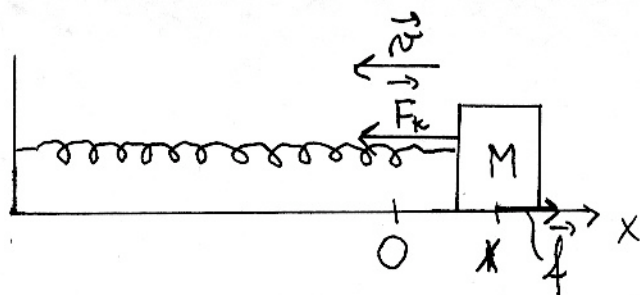
$$\text{iii. Krittisk demping: } \gamma = \omega_0 = \frac{b_{\text{krit}}}{2(M+m)}$$

$$\underline{\underline{b_{\text{krit}}}} = 2\omega_0(M+m) = \underline{\underline{28,5 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}}}$$



Svingeforløp: Utslag vil min og tilbake mot likevektposisjonen uten å passere denne.

c)



⑥

$$i. \quad \Sigma F = -kx_1 + f = M\ddot{x} \quad \text{for avlagende } x \text{ (se figuren over)}$$

$$\Sigma F = -kx - f = M\ddot{x} \quad \text{for økende } x$$

$$\Rightarrow \text{Diff. likn.} \quad \underline{\underline{M\ddot{x} + kx = \pm f = \pm \mu N = \pm \mu Mg}}$$

$$\text{Løsning:} \quad x_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1) + K \quad 0 \leq t \leq T/2 \text{ (avlag. } x)$$

$$x_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \delta_2) - K \quad \frac{T}{2} \leq t \leq T \text{ (økende } x)$$

Diff. likn. er ikkehomogen

Homogen likn.: $M\ddot{x} + kx = 0$ som for enkel harm. osc.
med løsning av type $A \cos(\omega t + \delta)$

som oppfyller diff. likn. dersom $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$

Obs! Endus ikke ved fuktig og

Spesiell løsning av diff. likn. $x_{\text{spes}} = \frac{f}{k} = K$ (konst)

som oppfyller diff. likn. (innsetting) og som gir: $\underline{\underline{K = \frac{\mu Mg}{k}}}$

d) i. Startbetingelser

$$\text{I} \quad x_1(t=0) = A_1 \cos \delta_1 + K = A_0$$

$$\text{II} \quad v(t) = \dot{x} = -\omega A_1 \sin(\omega t + \delta_1)$$

$$\dot{x}(t=0) = 0 = -\omega A_1 \sin \delta_1 \Rightarrow \sin \delta_1 = 0$$

$$\text{I} \Rightarrow A_1 + K = A_0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A_1 = A_0 - K}}$$

(7)

Betingelser ved $T/2$

$$x_1 = x_2 \quad (\text{Kontinuerlig bevægelse})$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0 \quad (\text{Kontinuerlig hastighed og } v=0 \text{ i max.pkt.})$$

$$\text{III} \quad x_1(T/2) = A_1 \cos(\omega T/2) + K = A_1 \cos \pi + K = -A_1 + K$$

$$\text{IV} \quad x_2(T/2) = A_2 \cos(\omega T/2 + \delta_2) - K$$

$$\text{V} \quad \dot{x}_2(T/2) = -\omega A_2 \sin(\pi + \delta_2) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\delta_2 = 0}}$$

$$\text{III og IV gir} \quad A_2 \cos \pi - K = -A_2 - K = -A_1 - K$$

$$\underline{\underline{A_2 = A_1 - 2K}}$$

$\Rightarrow$ For $0 \leq t \leq T$ er løsningen af diff. lkn.:

$$x_1 = (A_0 - K) \cos(\omega t) + K \quad 0 \leq t \leq T/2$$

$$x_2 = (A_0 - 3K) \cos(\omega t) - K \quad T/2 \leq t \leq T$$

ii. Energi ved $t=0$: $E_{p0} = \frac{1}{2} k A^2$

Ved $t=T$ er $x_2 = A_0 - 4K$

$$\Rightarrow \text{Energi ved } t=T : E_{pT} = \frac{1}{2} k (A_0 - 4K)^2$$

Energitap ved frysion:

$$\underline{\underline{W = \Delta E_p = -4KkA_0 + 8kK^2 = -\frac{1}{2}k(4A_0 - 8K)}}$$

Frysionsarbeidet:

$$\begin{aligned} W &= -\int \Delta x = -\int (A_0 + A_1 - K) - \int (A_1 - K + A_1 - 3K) \\ &= -\int (4A_0 - 8K) \end{aligned}$$

Frysionsarbeidet i løbet af første svingeperiode er lik energitapet i samme periode (som forventet).

Oppgave 3

⑧

a) i Trinn $1 \rightarrow 2$ er en isokor prosess:

Tilstandsligningen $pV = nRT$. Her n og V konstant.

$$\Rightarrow \frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow \underline{\underline{p_2 = p_1 (T_2/T_1)}}$$

Trinn $2 \rightarrow 3$ adiabatisk prosess

Her $pV^\gamma = \text{konst.}$ og $p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{konst.}$

$$\Rightarrow p_2^{1-\gamma} T_2^\gamma = p_3^{1-\gamma} T_3^\gamma = p_1^{1-\gamma} T_3^\gamma$$

$$\Rightarrow T_3^\gamma = T_2^\gamma \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\gamma} = T_2^\gamma (T_2/T_1)^{1-\gamma}$$

$$T_3^\gamma = T_2 \cdot T_1^{\gamma-1} \Rightarrow T_3 = T_2^{\frac{1}{\gamma}} \cdot T_1^{(\gamma-1)/\gamma}$$

$$\underline{\underline{T_3 = T_1 (T_2/T_1)^{1/\gamma}}}$$

ii. Trinn $1 \rightarrow 2$: Varmer tilført ved konst. volum

$$Q_{12} = n C_V (T_2 - T_1)$$

$$Q_{12} = 2,00 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} (750 - 300) \text{ K} = 18707 \text{ J}$$

$$\underline{\underline{Q_{12} = 18,7 \text{ kJ}}}$$

Temperaturen øker uten arbeid utført : Varmer tilført gassen.

Trinn $2 \rightarrow 3$ adiabatisk prosess :

Ingen varmenutveksling med omgivelsene

$$\underline{\underline{\Rightarrow Q_{23} = 0}}$$

Trinn $3 \rightarrow 1$: Varmer avgitt ved konstant trykk

⑨

$$Q_{31} = n c_p' (T_1 - T_3) = n \gamma c_v' [T_1 - T_1 (T_2/T_1)^{1/\gamma}]$$

$$Q_{31} = n \gamma c_v' T_1 [1 - (T_2/T_1)^{1/\gamma}]$$

$$c_p' = c_v' + R = \frac{5}{2}R + R = \frac{7}{2}R; \quad \gamma = \frac{c_p'}{c_v'} = \frac{7}{5} = 1.4$$

$$Q_{31} = 2.00 \text{ mol} \cdot 1.40 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 300 \text{ K} [1 - (\frac{750}{300})^{1/1.4}] = -16135 \text{ J}$$

$$\underline{Q_{31} = -16.1 \text{ kJ}} \quad : \text{ Avgitt fra gassen}$$

b) 1. lov for prosessen: $Q = \Delta U + W$

Syklisk prosess: $\Delta U = 0$

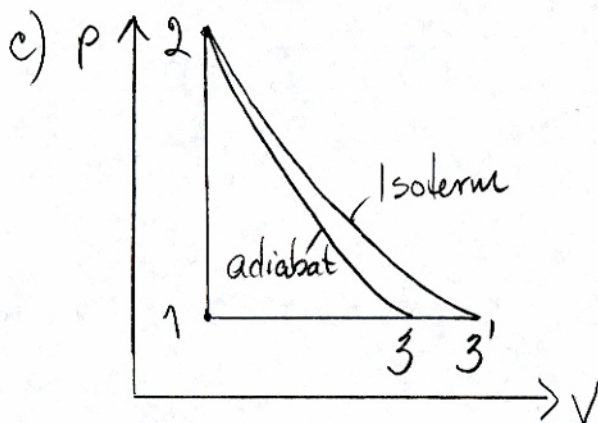
$$\Rightarrow W_{\text{net}} = Q_{\text{net}}$$

$$\underline{W_{\text{net}} = Q_{12} + Q_{31} = 2.57 \text{ kJ}}$$

Virkningsgraden for prosessen:

$$\varepsilon = \frac{W_{\text{net}}}{Q_{\text{tilført}}} = \frac{W_{\text{net}}}{Q_{12}} = \frac{2572 \text{ J}}{18707 \text{ J}}$$

$$\underline{\varepsilon = 0.137}$$



Isoterm: $pV = \text{konst.}$
 $\Rightarrow p \propto \frac{1}{V}$

Adiabat: $pV^\gamma = \text{konst.}$
 $p \propto \frac{1}{V^\gamma}$

Da $\gamma > 1$ vil isotermen falle langsommere enn

adiabater fra tilstand 2.

(10)

Tilstand 3' har samme tryk som 3, men $V_{3'} > V_3 \Rightarrow$ Process med isotermt stigning
1-2-3'-1 har større areal en processen med et adiabatisk stigning, 1-2-3-1, se figur.

$$\Rightarrow \underline{W_{\text{net, isotherm}} > W_{\text{net, adiabat}}}$$

d) Trin 1 $\rightarrow$ 2 : Som tidligere : $W_{12} = 0$

$$\underline{Q_{12} = \Delta U = n c_v' (T_2 - T_1)} \quad (\text{tilført})$$

Trin 2 $\rightarrow$ 3' $\Delta U = 0$ V_3'

$$Q_{23'} = W_{23'} = \int_{V_2}^{V_3'} p dV = n R T_2 \ln(V_{3'}/V_1)$$

Isoterm $T_2 = T_3' \Rightarrow P_2 V_2 = P_3' V_3' = P_2 V_1 = P_1 V_3'$

$$\Rightarrow V_{3'} = V_1 (P_2/P_1) = V_1 (T_2/T_1)$$

$$\underline{Q_{23'} = n R T_2 \ln(T_2/T_1)} \quad (\text{tilført})$$

Trin 3' $\rightarrow$ 1 : $\Delta Q = n c_v' (T_1 - T_3') = -W_{3'1} + n c_p' (T_1 - T_3)$

$$W_{3'1} = n (c_p' - c_v') (T_1 - T_3) = n (c_p' - c_v') (T_1 - T_2)$$

$$\Rightarrow W_{\text{net, isotherm}} = n (c_p' - c_v') (T_1 - T_2) + n R T_2 \ln(T_2/T_1)$$

$$W_{\text{net, isotherm}} = 2,00 \text{ mol} \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \left[\left(\frac{7}{2} - \frac{5}{2} \right) (300 - 750) \text{ K} + 750 \text{ K} \ln\left(\frac{750}{300}\right) \right]$$

$$W_{\text{net, isotherm}} = 3944 \text{ J} \approx 3,94 \text{ kJ}$$

$$Q_{\text{tilført}} = Q_{12} + Q_{23'} = 18707 \text{ J} + 2,0 \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 750 \text{ K} \ln\left(\frac{750}{300}\right) = 30134 \text{ J}$$

(11)

Virkningsgrad: $\underline{E_{isotherm}} = \frac{W_{net, isotherm}}{Q_{tilført}} = \underline{0,131}$

Maksimal virkningsgrad: $E_{Carnot} = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{300K}{750K}$
 $\underline{E_{Carnot} = 0,600}$

Differansen $W_{net, isotherm} - W_{net, adiabatisk} = (3944 - 2572)J$
 $= 1372J$

tilsvarende en økning i netto utført arbeid med 53%.
 Men isoterme $2 \rightarrow 3'$ medfører også en økning i
 tilført varme, $Q_{23'} > 0$, på 61%, slik at

$E_{isotherm} \approx E_{adiabatisk}$. Begge disse er ca 22%
 av E_{Carnot} . Den 3-dinns prosessen har lav
 virkningsgrad, relativt lite påvirket av om
 stegnet $2 \rightarrow 3 / 2 \rightarrow 3'$ er en adiabatisk
 eller isotherm ekspansjon.