

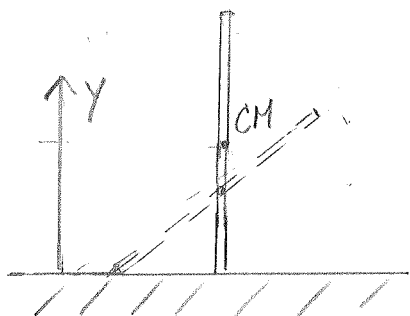
LØSNINGSFORSLAG

①

EKSAMEN DESEMBER 2004 TFY4115 FYSIKK

Oppgave 1

a)



Uten friksjon vil massemiddel-
punktet falle rett ned:

Energibevaring idet flata velges
som nullpunkt for potensiell
energi.

$$\Delta E_p = \Delta E_k$$

$$Mg\left(\frac{L}{2} - y\right) = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

$$= \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} M L^2 \cdot \left(\frac{v_{cm}}{L/2}\right)^2$$

$$\Rightarrow g\left(\frac{L}{2} - y\right) = \frac{1}{2} v_{cm}^2 + \frac{1}{6} v_{cm}^2 = \frac{2}{3} v_{cm}^2$$

Når staven når den horisontale flata er $y=0$

$$\Rightarrow \underline{v_{cm} = \frac{1}{2} \sqrt{3gL}}$$

Dermed endepunktet ikke glir vil vi ha en friksjons-
kraft fra flata på staven. Så lenge staven ikke
glir vil ikke friksjonskrafta utføre noe arbeid
og vi har også i dette tilfellet energibevarelse.

Med samme endring i potensiell energi, vil resulterende
kinetiske energi være den samme $\Rightarrow$ Samme
 v_{cm} idet staven heffer den horisontale flata.

b) Fra a) har vi:

$$g\left(\frac{L}{2} - y\right) = \frac{2}{3} \omega_{cm}^2$$

Derivasjon gir:

$$-g\dot{y} = \frac{4}{3} \omega_{cm} \cdot \dot{\omega}_{cm} = \frac{4}{3} \omega_{cm} \cdot a_{cm}$$

⇒ Vertikal akselerasjon blir dermed:

$$\underline{a_{vert} = a_{cm} = -\frac{3}{4}g} \quad \text{q.e.d.}$$

÷ tegnet skyldes at a_{cm} har retning langs negativ y-retning.

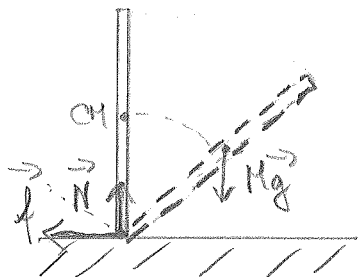
c) Resultende kraft uten friksjon (staven glir):

Ingen friksjonskraft ⇒ Bare normalkraft fra underlaget:

$$\Sigma F = M a_{vert} = N - Mg = -\frac{3M}{4}g$$

$$\Rightarrow \underline{N = \frac{1}{4}Mg} \quad \text{Resulterende kraft, } \perp \text{ på ift. overflata}$$

Resulterende kraft med friksjon



Sentripetalakselerasjon:

$$f = Ma = M \omega_{cm}^2 / r$$

$$\underline{f = M \cdot \frac{3gL}{4 \cdot \frac{L}{2}} = \frac{3}{2}Mg} \quad (\text{horisontalt})$$

Vertikalt: $\Sigma F = N - Mg = M a_{vert}$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{4}Mg$$

Resulterende kraft: $F = \sqrt{f^2 + N^2}$

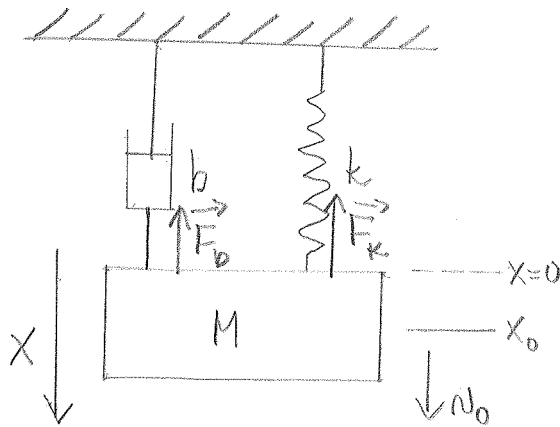
$$\Rightarrow \underline{F = \sqrt{\left(\frac{3}{2}Mg\right)^2 + \left(\frac{1}{4}Mg\right)^2}} = Mg \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{16}} = \underline{\underline{\frac{Mg}{4} \sqrt{37}}}$$

Retningene til f og N angitt på figuren over

$$\Rightarrow F \text{ danner vinkelen } \Theta \text{ gitt ved } \tan \Theta = \frac{1/4}{3/2} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \Theta = 9,5^\circ \text{ med horisontalen,}$$

Oppgave 2



a) Newtons 2. lov:

$$\sum F = Ma = -kx - b\dot{x}$$

$$\Rightarrow M\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

$$\text{Med } \gamma = b/2M \text{ og } \omega_0^2 = \frac{k}{M}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}}$$

i. Startbetingelser : $x(t=0) = x_0$
 $v(t=0) = v_0$

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \delta)$$

$$x(t=0) = \underline{A_0 \cos \delta = x_0} \quad (1) \text{ F\u00f8rste likning}$$

ii. $v(t) = -\omega' A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega' t + \delta) - \gamma A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \delta)$

$$v(t=0) = \underline{v_0 = -A_0 \omega' \sin \delta - \gamma A_0 \cos \delta} \quad (2) \text{ Andre likn.}$$

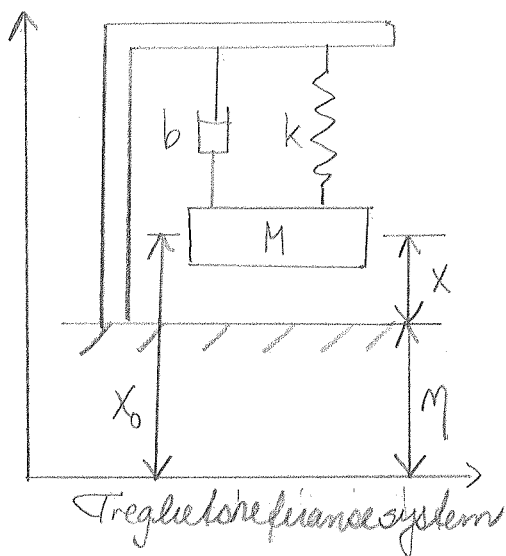
iii. L\u00f8s (2)/likn (1) gir:

$$\frac{v_0}{x_0} = \frac{-A_0 [\omega' \sin \delta + \gamma \cos \delta]}{A_0 \cos \delta} = -\omega' \tan \delta - \gamma$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tan \delta = -\frac{1}{\omega'} \left[\frac{v_0}{x_0} + \gamma \right]}} \quad \text{q.e.d.}$$

(4)

b)



$$i. X_0 = \eta + x \quad (3)$$

$$\ddot{X}_0 = \ddot{\eta} + \ddot{x} \quad (4)$$

$$\text{Fjærkraft} : F_k = -kx$$

$$\text{Dempetraft} : F_b = -b\dot{x}$$

Fjærkrafta og dempetrafta avhenger berre av avstanden mellom jorda (oppheget) og massen M , gitt av x .

Newtons 2. lov i det absolute koordinatsystemet:

$$\sum F = F_k + F_b = Ma = -kx - b\dot{x} = M\ddot{x}$$

$$\text{Innsetting av (4) gir: } M(\ddot{\eta} + \ddot{x}) + b\dot{x} + kx = 0$$

Med $\gamma = b/2M$ og $\omega_0^2 = k/M$ får vi da:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = -\ddot{\eta} \quad \text{q.e.d}$$

ii. Med $-\ddot{\eta} = C \cos(\omega t)$ er den stasjonære løsningen for denne tvungne svingningen:

$$\underline{x(t) = A(\omega) \cos(\omega t - \delta)}$$

For en ytre kraft $F(t) = F_0 \cos \omega t$ har vi:

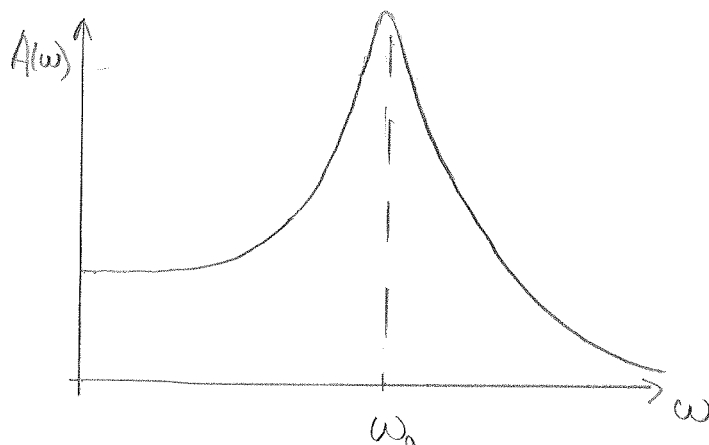
$$A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{M^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} = \frac{F_0/M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

Her er C en abstraksjon av F_0/M

$$\Rightarrow \underline{A(\omega) = \frac{C}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}}$$

$$\underline{\tan \delta = \frac{b\omega}{M(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

iii.



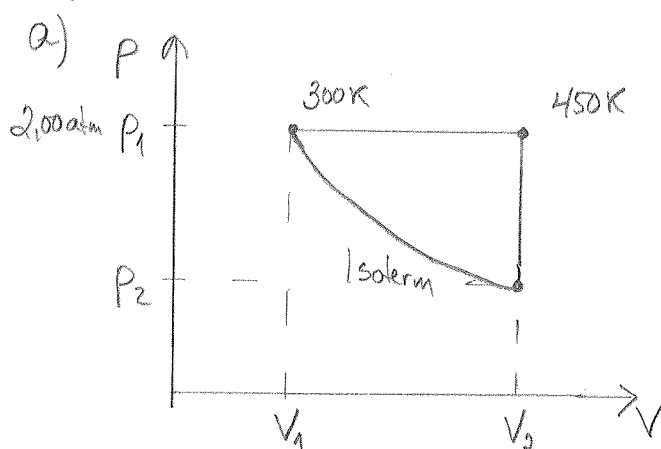
Kvalitativt bilde
av $A(\omega)$.

$$c) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad ; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad ; \quad \gamma = \frac{\omega_0}{2Q} = \frac{\pi}{QT_0}$$

$$A(\omega) = \frac{c}{\sqrt{\left[\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{\pi}{QT_0}\right)^2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}}$$

$$\underline{A(\omega)} = \frac{10 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2}{(2\pi)^2 \sqrt{\left[\left(\frac{1}{5.0}\right)^2 - \left(\frac{1}{20}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{1}{2.0 \cdot 5.0}\right)^2 \left(\frac{1}{20}\right)^2} \text{ s}^{-2}} = \underline{6.7 \cdot 10^{-3} \text{ m}}$$

Oppgave 3



$$C_V = 41.6 \text{ J/K}$$

$$C_P = C_V + nR$$

$$C_P = 41.6 \frac{\text{J}}{\text{K}} + 2.00 \text{ mol} \cdot 8.31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

$$C_P = 58.2 \text{ J/K}$$

Adiabatkonstanter

$$\underline{\gamma} = \frac{C_P}{C_V} = \frac{58.2}{41.6} = \underline{1.40}$$

(6)

Molar varmekapasitet ved konstant volum

$$c_v = \frac{C_v}{n} = 20,8 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = \frac{dU}{dT} = \frac{f}{2} \cdot R \quad f = \text{antall frihetsgrader}$$

$$\Rightarrow \underline{f = 5}$$

$\Rightarrow$ Gassen har 5 frihetsgrader (2-atomig gass) som er 3 translasjonsfrihetsgrader og 2 rotasjonsfrihetsgrader.

b)

$$\underline{V_1} = \frac{nRT_1}{P_1} = \frac{2,00 \text{ mol} \cdot 8,3145 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 300 \text{ K}}{2,02 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = \underline{0,0247 \text{ m}^3}$$

$$\underline{V_2} = \frac{nRT_2}{P_1} = \frac{2,00 \text{ mol} \cdot 8,3145 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 450 \text{ K}}{2,02 \cdot 10^5 \text{ Pa}} = \underline{0,0370 \text{ m}^3}$$

Arbeid i den isobar prosessen a $\rightarrow$ b:

$$W_{ab} = \int_{V_1}^{V_2} P dV = P_1 (V_2 - V_1) = 2,02 \cdot 10^5 \text{ Pa} (0,0370 - 0,0247) \text{ m}^3$$

$$\underline{W_{ab} = 2,485 \text{ kJ}}$$

Arbeid i den isokor prosessen, b $\rightarrow$ c, $\Delta V = 0$

$$\Rightarrow \underline{W_{bc} = 0}$$

Arbeid i den isoterme prosessen:

$$W_{ca} = \int_{V_2}^{V_1} P dV = \int_{V_2}^{V_1} \frac{nRT_1}{V} dV = nRT_1 \ln(V_1/V_2)$$

$$\Rightarrow \underline{W_{ca} = 2,00 \text{ mol} \cdot 8,3145 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot 300 \text{ K} \ln\left(\frac{0,0247}{0,0370}\right) = -2,016 \text{ kJ}}$$

Netto arbeid pr. syklus:

$$\underline{W_{\text{netto}} = W_{ab} + W_{ca} = (2,485 - 2,016) \text{ kJ} = \underline{0,469 \text{ kJ}}}$$

Virkningsgraden: $\varepsilon = \frac{W_{\text{netto}}}{Q_{\text{tilført}}}$

Varme tilført i prosess $a \rightarrow b$ og avgitt i $b \rightarrow c$ og $c \rightarrow a$

Varme tilført i den isobare prosessen $a \rightarrow b$:

$$Q_{ab} = C_p \Delta T = 58,2 \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot (450 - 300) \text{K} = \underline{8730 \text{ J}}$$

$$\Rightarrow \text{Virkningsgraden: } \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{9469}{8730} = \underline{\underline{0,0537}}$$

(Ikke særlig brukbart for anvendelse)

c) Entropiendring i den isobare prosessen $a \rightarrow b$:

$$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = \frac{C_p dT}{T}$$

$$\Delta S_{ab} = \int_{T_1}^{T_2} C_p \frac{1}{T} dT = C_p \ln(T_2/T_1) = 58,2 \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot \ln\left(\frac{450}{300}\right)$$

$$\underline{\underline{\Delta S_{ab} = 23,6 \text{ J/K}}}$$

Entropiendring i den isokore prosessen $b \rightarrow c$:

$$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = \frac{C_v dT}{T}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Delta S_{bc} = C_v \ln(T_1/T_2) = 41,6 \frac{\text{J}}{\text{K}} \ln\left(\frac{300}{450}\right) = -16,9 \frac{\text{J}}{\text{K}}}}$$

Endring i entropi i den isoterme prosessen $a \rightarrow b$:

$$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = \frac{pdV}{T} = \frac{nRT}{T \cdot V} dV$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Delta S_{ca} = nR \ln(V_1/V_2) = 2,00 \cdot 8,314 \frac{\text{J}}{\text{K}} \ln\left(\frac{0,0247}{0,0370}\right) = -6,7 \frac{\text{J}}{\text{K}}}}$$

$$\underline{\underline{\Delta S_{\text{syklus}} = \Delta S_{ab} + \Delta S_{bc} + \Delta S_{ca} = 0}}$$

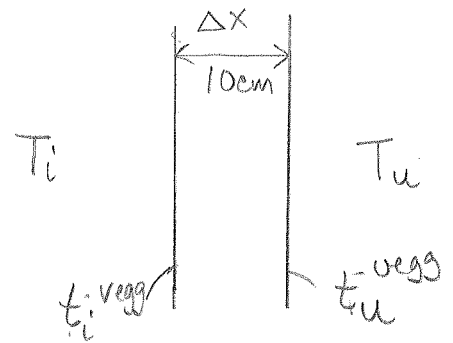
Kommentar: Fordi entropien er en tilstandsfunksjon forventes samme verdi etter en syklus $\Rightarrow \Delta S_{\text{syklus}} = 0$
som vi finner ved beregning.

Oppgave 4

$$a) \quad I = \frac{A (T_i - T_u)}{\frac{1}{h_u} + \frac{\Delta x}{k} + \frac{1}{h_i}}$$

$$I = \frac{150 \text{ m}^2 [20 - (-20)] \text{ K}}{\left(\frac{1}{20} + \frac{0,10}{0,040} + \frac{1}{5,0} \right) \frac{\text{m}^2 \text{ K}}{\text{W}}}$$

$$\underline{I = 2,18 \text{ kW} \approx 2,2 \text{ kW}}$$



Temperaturfall inneluft til innervegg:

$$I = \frac{A \Delta T_1}{\frac{1}{h_i}} \Rightarrow \Delta T_1 = \frac{1}{h_i} \frac{|I|}{A} = \frac{\text{m}^2 \text{ K}}{50 \text{ W}} \cdot \frac{2,18 \text{ kW}}{150 \text{ m}^2}$$

$$\Rightarrow \Delta T_1 = 2,9 \text{ K}$$

$$\Rightarrow \text{Temperaturen p\aa innerveggen } \underline{t_i^{\text{vegg}}} = (20,0 - 2,9)^\circ \text{C} = \underline{17,1^\circ \text{C}}$$

Temperaturfall utevegg til uteluft:

$$\Delta T_2 = \frac{1}{h_u} \cdot \frac{|I|}{A} = \frac{\text{m}^2 \text{ K}}{20 \text{ W}} \cdot \frac{2,18 \text{ kW}}{150 \text{ m}^2} = 0,73 \text{ K}$$

$$\Rightarrow \text{Temperaturen p\aa yttelveggen: } \underline{t_u^{\text{vegg}}} = (0,7 - 20,0)^\circ \text{C} = \underline{-19,3^\circ \text{C}}$$