

Oppgave 1

$$\vec{L} = M \vec{R} \times \vec{V}_{CM} + I \vec{\omega}$$

a) $L_0 = I \omega_0 = \underline{\underline{\alpha M R^2 \omega_0}}$

b) $L_1 = M R \underline{R \omega_1} + I \omega_1$

Betingelse for en rulling!

$$= M R^2 \omega_1 + \alpha M R^2 \omega_1$$

$$= M R^2 (1 + \alpha) \omega_1$$

Bevarelse av spin:

$$L_0 = L_1$$

$$\alpha M R^2 \omega_0 = M R^2 (1 + \alpha) \omega_1$$

$$\underline{\underline{\omega_1 = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \omega_0}}$$

c)

$$s = \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = a t$$

$$= \omega_1 R$$

$$F_f = \mu g M = M a$$

$$\underline{a = \mu g}$$

$$t = \frac{v}{a} \Rightarrow s = \frac{v^2}{2a}$$

$$= \frac{(\omega_1 R)^2}{2 \mu g}$$

$$\underline{\underline{s = \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha)^2} \frac{(\omega_0 R)^2}{2 \mu g}}}$$

$$S = \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^2 B; \quad B = \frac{(\omega_0 R)^2}{2\mu g} \quad (2)$$

Massiv kule: $\alpha = \frac{2}{5}$

Massiv ~~kule~~ cylinder: $\alpha = \frac{1}{2}$

Hul cylinder: $\alpha = 1$

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \left[\frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2} - \frac{2\alpha^2}{(1+\alpha)^3} \right] B$$

$$= \frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2} B \left(1 - \frac{\alpha}{1+\alpha} \right)$$

$$= \frac{2\alpha}{(1+\alpha)^3} B > 0$$

Det betyder at distansen legemet må bevæge sig for bevægelsen går over til ren rulling, øker når α øker. Det betyr igjen at det legemet med minst α må bevæge seg kortest distance, mens det med størst α må bevæge seg størst lunge.

Massiv kule tilbakelegger kortest distance for bevægelsen går over til ren rulling, mens hul cylinder må bevæge seg langt

d)

Kinetisk energi

2

$$E_k = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Reff for legemet brøst undulaget

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega_0^2$$

$$= \frac{1}{2} \alpha M R^2 \omega_0^2$$

I det øyeblikket bevegelsen er gått til sin sluttende bevegelse:

$$E_k = \frac{1}{2} M R^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} \alpha M R^2 \omega_1^2$$

$$= \frac{1}{2} M R^2 (1 + \alpha) \omega_1^2$$

$$= \frac{1}{2} M R^2 (1 + \alpha) \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha)^2} \omega_0^2$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} M R^2 \omega_0^2 \left(\alpha - \frac{\alpha^2}{1 + \alpha} \right)$$

$$= \frac{1}{2} M R^2 \omega_0^2 \left(\frac{\alpha + \alpha^2 - \alpha^2}{1 + \alpha} \right)$$

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} M R^2 \omega_0^2 \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

$$W = \text{Friksjonskraft} \cdot s$$

$$= \mu g M \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha)^2} \frac{\omega_0^2 R^2}{2 \mu g}$$

$$= \frac{1}{2} M R^2 \omega_0^2 \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} \right)^2$$

$$\Delta E_k - W = \frac{1}{2} M R \omega_0^2 \left[\frac{\alpha}{1+\alpha} - \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^2 \right] \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} M R \omega_0^2 \frac{\alpha}{1+\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{1+\alpha} \right)$$

$$= \frac{1}{2} M R \omega_0^2 \frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} > 0$$

Massiv kule $\alpha = \frac{2}{5}$: $\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} = \frac{\frac{2}{5}}{\left(\frac{7}{5}\right)^2} = \frac{10}{49} = 0.2041$

Massiv sylinde $\alpha = \frac{1}{2}$: $\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{2}{9} = 0.2222$

Hul sylinde $\alpha = 1$: $\frac{\alpha}{(1+\alpha)^2} = \frac{1}{4} = 0.25$

$\Delta E_k - W$ er minst for
massiv kule

$\Delta E_k - W > 0$ fordi arbeidet i kinetisk energi skyldes friksjonsarbeidet utført av et spinnende legeme, som beveger seg en distance s . Fordi legemet spinner over en lengde s , blir den effektive lengden i friksjonsarbeidet som gir ΔE_k større enn $s \Rightarrow \Delta E_k > W$

Oppgave 2

(5)

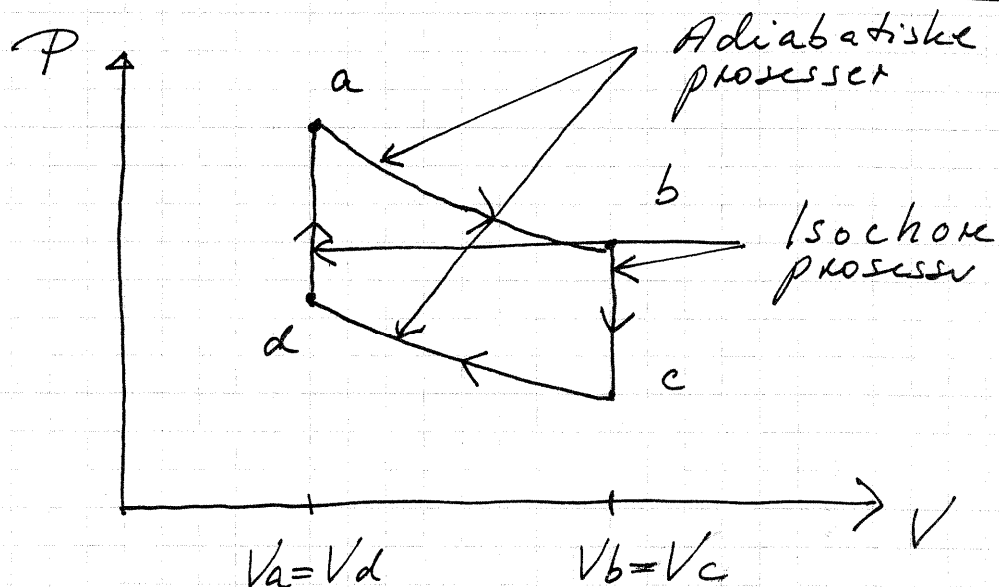
a) Isoterm prosess: Prosess ved konstant temperatur.

Isochor prosess: Prosess ved konstant volum

Isobar prosess: Prosess ved konstant trykk

Adiabatiske prosess

i Prosess der det ikke avgis eller oppføres varme.



$$V_b = V_c$$

$$\underline{V_a = V_d}$$

b)

$$dQ = dU + PdV$$

$$\left. \begin{array}{l} a \rightarrow b: \\ c \rightarrow d: \end{array} \right\} dQ = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} b \rightarrow c \\ d \rightarrow a \end{array} \right\} \begin{array}{l} PdV = 0 \\ dQ = dU \end{array}$$

Dermed får vi, langs isochore:

⑥

$$du = C_v dT$$

Avgitte varme: $b \rightarrow c$: $Q_c = C_v (T_c - T_b)$

Oppgitte varme: $d \rightarrow a$: $Q_h = C_v (T_a - T_d)$

c)

Ideell gas: $PV = Nk_B T$

Langs en adiabat: $dQ = 0$

$$0 = C_v dT + P dV$$

$$= C_v dT + Nk_B T \frac{dV}{V}$$

$$0 = C_v \frac{dT}{T} + Nk_B \frac{dV}{V}$$

$$C_p = C_v + Nk_B$$

$$\frac{C_p - C_v}{C_v} = \frac{Nk_B}{C_v} = \gamma - 1$$

$$0 = \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V}$$

$$C_1 = \ln T + (\gamma - 1) \ln V$$

der C_1 er en integrasjons konstant.

$$C_1 = \ln (TV^{\gamma-1})$$

$TV^{\gamma-1} = e^{C_1} = \text{konstant}$
langs en adiabat.

Demmed fra vi, langs adiabater
 $a \rightarrow b$:

$$\underline{T_a V_a^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1}}$$

Tilsvarende, langs adiabatene $c \rightarrow d$:

$$\underline{T_c V_c^{\gamma-1} = T_d V_d^{\gamma-1}}$$

d) Virkningsgraden:

$$\varepsilon = 1 - \frac{|Q_c|}{Q_h}$$

$$= 1 - \frac{C_v (T_b - T_c)}{C_v (T_a - T_d)}$$

$$= 1 - \frac{T_b - T_c}{T_a - T_d}$$

I prosessen oven er det volumen, og ikke temperatur, som er eksakt kontrollert. Derfor ønsker vi å eliminere T til fordel for V . Til dette bruker vi adiabatligninger.

$$T_a V_a^{\gamma-1} = T_b V_b^{\gamma-1}$$

$$T_d V_a^{\gamma-1} = T_c V_b^{\gamma-1}$$

$$(T_a - T_d) V_a^{\gamma-1} = (T_b - T_c) V_b^{\gamma-1}$$

$$\left(\frac{V_a}{V_b}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_b - T_c}{T_a - T_d}$$

V_c innføres nå

$$\gamma = \frac{V_c}{V_a} = \frac{V_b}{V_a}$$

$$\left(\frac{V_a}{V_b}\right)^{\gamma-1} = \frac{1}{\gamma^{\gamma-1}} = \frac{1}{\gamma^{1-\gamma}}$$

$$\underline{\underline{\epsilon = 1 - \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\gamma-1}}}$$

$$\underline{\underline{\gamma > 1}}$$

$$\underline{\underline{\frac{C_p}{C_v} = 1 + \frac{N_{kv}}{C_v}}}$$

Spørsmålet er hvordan ϵ endrer
nå vi endrer arbeidssubstanse
fra 2-atomig til 1-atomig
gass. Da endrer vi γ .

$$2\text{-atomig: } C_v = \frac{5}{2} N_{kv} \Rightarrow \gamma = \frac{7}{5}$$

$$1\text{-atomig: } C_v = \frac{3}{2} N_{kv} \Rightarrow \gamma = \frac{5}{3}$$

V_c øker γ nå vi går fra
2-atomig til 1-atomig

$$\gamma > 1 \Rightarrow \frac{1}{\gamma} < 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{\gamma-1} \text{ blir}$$

mindre nå γ øker. Dermed
øker ϵ nå vi går fra 2-atomig
til 1-atomig gass.

Oppgave 3

9

a) $x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \theta)$

$t = 0 : \quad x = 0$

$\frac{dx}{dt} = V_0$

} Oppgitte initial-
betingelser.

$x(0) = 0 = A \cos \theta$

For å ha noen svingning i det hele
satt, må $A \neq 0$. Altså må $\cos \theta = 0$

$\Rightarrow \theta = (2n+1) \frac{\pi}{2}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Velv $n =$ like $= 0, \pm 2, \pm 4, \dots$

(Velv av n odder betyr at A
skifter fortegn).

Dermed: $x(t) = -A e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$

$$\frac{dx}{dt} = - \left[-\gamma A e^{-\gamma t} \sin(\omega t) + \omega A e^{-\gamma t} \cos(\omega t) \right]$$

$t = 0 : \quad \frac{dx}{dt} = V_0 = -\omega A$

$A = -\frac{V_0}{\omega}$

b) Sett $x(t) = \operatorname{Im} \left(A e^{-\gamma t + i\omega t} \right); \quad \underline{i = \sqrt{-1}}$

Innsatt i bevegelsesligning:

$m(\gamma - i\omega)^2 - b(\gamma - i\omega) + k = 0$

at multipliceret, får vi: (10)
 $k + m(\gamma^2 - \omega^2) - b\gamma + i(b\omega - 2\omega\gamma m) = 0$
 Her må realdel og imaginærdel hver for sig være null:

$$b\omega - 2\omega\gamma m = 0$$

$$\underline{\underline{\gamma = \frac{b}{2m}}}$$

$$\frac{k}{m} + \gamma^2 - \omega^2 - \frac{b\gamma}{m} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} + \gamma^2 - 2\gamma^2 = \frac{k}{m} - \gamma^2$$

$$\underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \gamma^2}}}$$

c) $x(t) = -\frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t) e^{-\gamma t}$

Hadde vi i stedet valgt
 en odde i pkt. a), ville
 vi få:

$$x(t) = \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t) e^{-\gamma t}$$

Maximalt udbleg får vi når
 faktoren $\sin(\omega t)$ når maximum

første gang: $\sin(\omega T_1) = 1 \Rightarrow \omega T_1 = \frac{\pi}{2}$

$$T_1 = \frac{\pi}{2\omega}$$

Ved tiden T_1 er $x(\frac{\pi}{2\omega})$:

$$x(T_1) = \pm \frac{V_0}{\omega} e^{-\gamma T_1}$$

$$= \pm \frac{V_0}{\omega} e^{-\frac{\gamma \pi}{2\omega}}$$

$$= \pm \frac{V_0}{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}} e^{-\frac{\pi \gamma}{2\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}}}$$

La m øke ved fikset V_0 .

b inngår som en friksjonskoeffisient

$$F_d = \mu m a$$

$$b \sim m \quad \gamma = \frac{b}{2m} \sim \text{uavh. av } \underline{m}$$

Når m øker, reduseres ω

$$|x(T_1)| = \frac{V_0}{\omega} e^{-\frac{\pi \gamma}{\omega}}$$

ω reduseres $\Rightarrow |x(T_1)|$ reduseres når

$$\gamma^2 < \frac{k}{m} < 2\gamma^2$$

$|x(T_1)|$ øker når

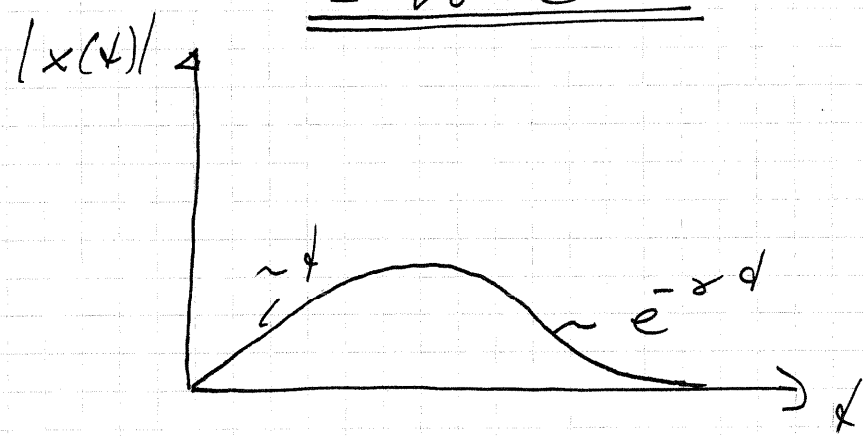
$$\underline{\underline{\frac{k}{m} > 2\gamma^2}}$$

d) Det som gjør at $x(t)$ utfører en svingebewegelse, er faktoren $\sin(\omega t)$.

$$x(t) = \pm \frac{V_0}{\omega} e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$$

For å hindre svingning, må vi ha: $\omega = 0$. Da blir

$$x(t) = \pm \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{V_0}{\omega} e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$$
$$= \pm V_0 t e^{-\gamma t}$$



$$\omega = 0 \Rightarrow \frac{b}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Minste verdi av b som gir et slikt forløp:

$$\underline{\underline{b = \sqrt{2 km}}}$$