

Løsningsforslag, Eksamen TFR 4115, H06

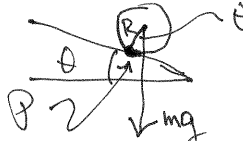
6 korte spørsmål

Se merknad på side 10!

1. Når to "sluknete" satellitter kolliderer

- er det ingen grunn til å tro at kollisjonen er elastisk, kinetisk energi vil dermed gå tapt ved at den omgjøres (delvis) til varme. Kinetisk energi er ikke konservervt.
- vil bevegelsesmengden i selve kollisjonsprosessen være konservervt. Riktignok vil begge satellittene hele tiden påvirkes av tiltrekningskraften fra jorda, som yter den nødvendige sentripetalkraft. Svaret: "Bevegelsesmengden er bevart" er OK siden det antas å referere til selve kollisjonsprosessen. Nysnusing av svaret pga jordas tiltrekning er selvsagt utmerket!
- Satellittens totale spinnt må være konservervt når referansepunktet er jordas sentrum. Da vil kraften $\times$ arm = dreiemoment være null.

2. Kassen beveger seg ikke, altså må netto kraft på kassen være null. Friksjonskraften er derfor 500 N og rettet mot dyttekraften (som forutsettes å være parallell med underlaget). Den maksimale friksjonskraft er $\mu_s mg = 0.6 \cdot 100 \cdot 9.8 \text{ N} = 588 \text{ N} > 500 \text{ N}$. OK!

3.  Dreiemoment relativt punktet P:
 $\tau = \text{kraft} \times \text{arm} = mg \times R \sin \theta = mgR \sin \theta$

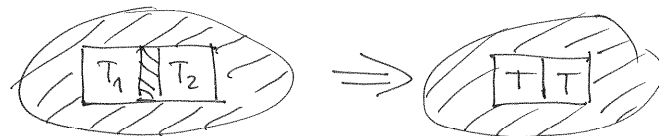
4. Termodynamikkens første lov (energibevarelse) kan skrives $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$ (eller $Q = \Delta U + W$)
 (tilført varme) $\downarrow$ endring i indre energi $\uparrow$ arbeid utført på omgivelsene
 Varmedekapasiteter er definert som:

$$C_V = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_{V+\Delta V}; C_P = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_P \quad (\text{strengt ktt: } \lim_{\Delta T \rightarrow 0})$$

Siden $\Delta W = \int p dV$, er $\Delta W = 0$ når $\Delta V = 0$, ved konstant volum utfører systemet intet arbeid på omgivelsene, all tilført varme blir brukt til å heve indre energi. Når derimot $P = \text{konst.}$, er $\Delta W = P \Delta V$, systemet utfører arbeid på omgivelsene, i tillegg til at indre energi øker (når varme tilføres). Altså: $C_P > C_V$

Siden kompressibiliteten til gasser er betydelig, er $C_P - C_V$ betydelig for gasser (Eks: Ett mol ideell gass $C_P - C_V = R$, mens $C_V = \frac{5}{2}R$ totalt). Kompressibiliteten til væsker, og i enda høyere grad faste stoff, er så liten at forskjellen $C_P - C_V$ i de aller fleste tilfelle kan neglisjeres relativt (f.eks.) C_P .

5.



Her er $Q = 0$, siden klossene er varmeisoleret fra omgivelsene. Dessuten er $W = 0$. Dermed

* Ett veldig spesielt unntak: Vann mellom 0°C og 4°C . Da er ρ_{vann} på

3

gir 1. hovedsetning at ΔU , dvs den totale indre energi er bevart i temperaturufjenningsprosessen. Siden prosessen åpenbart er irreversibel (den går ikke spontant motsett vei!), er $\Delta S > 0$. Entropien øker, den er ikke bevart. Produktet $T_1 T_2$ er det heller ikke, $T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ siden $C_1 = C_2 = C$. (Dersom ufjenningsprosessen hadde vært kjøpt reversibelt, med uttak av arbeid i en Carnot-type prosess, ville derimot $\Delta S = 0$ og $T_1 T_2 = \text{konst.}$)

6. For en elektrisk svingekrets med L, C og R koplet i serie, gir Kirchhoff $:-Q/C + RI + L\dot{I} = 0$, eller $L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0$. Dette gir analogiene: $L \leftrightarrow m$; $R \leftrightarrow b$; $1/C \leftrightarrow k$.

Oppgave A

7. Varmedningsligningen (med Fouriers lov $\vec{j} = -\kappa \nabla T$) gir $j = -\kappa \frac{T_1 - T_2}{b}$ (med passende fortegnvalg)

Ohms lov $I = U/R$ gir derfor analogiene $T_1 - T_2 \leftrightarrow \text{potensialforskjell} = \text{spenning}$; $j \leftrightarrow \text{strøm}$ $b/\kappa \leftrightarrow \text{motstand}$. En lagdelt vegg blir da analog med en seriekopling av motstander, slik at varmedningsstrømmen (rettet innover og ut) blir

$$j_e = \frac{T_i - T_y}{\frac{b_i}{\kappa_t} + \frac{b_l}{\kappa_l} + \frac{b_y}{\kappa_t}}$$

Dimensjoner: $[j_e] = \frac{W}{m^2}$; $[T] = K$; $[b] = m$; $[\kappa] = \frac{W}{mK}$

4

Dimensjonen til κ kan, slik den er notert i oppgaven $W/(mK)$ misforstås som millikelvin i stedet for meter-Kelvin. Men at dette er en misforståelse, må være åpenbart siden den gir $[j_e] = \kappa \cdot \frac{W}{K} / m = W/m$, som ikke er en energistrøm pr. flateenhet.

Innsetting av tall (med $cm = 10^{-2} m$) gir: $j_e = 3.76 \frac{W}{m^2}$

8. I analogi med Ohms lov ($U = RI$) er

$$T_i - T_{io} = j_e \frac{b_i}{\kappa_t} \quad \text{og} \quad T_y - T_y = j_e \frac{b_y}{\kappa_t}$$

Innsetting av tall (inkludert $j_e = 3.76 W/m^2$) gir

$$T_{io} = \left(293 - 3.76 \frac{0.02}{0.14} \right) K = 292.46 K$$

$$T_{yo} = \left(273 + 3.76 \frac{0.025}{0.14} \right) K = 273.67 K$$

9. Når vi tilnærmer $T_{io}^4 - T_{yo}^4 \approx 4T^3(T_{io} - T_{yo})$ får vi

$$\frac{j_s}{j_e} = \frac{\frac{e}{2-e} \cdot \sigma \cdot 4T^3}{\frac{\kappa_l}{b_l}} = b_l \cdot \frac{e \cdot \sigma}{2-e \kappa_l} 4T^3 \sim b_l$$

Forholdet er proporsjonalt med b_l !

Og med innsett tall blir dette

$$\frac{j_s}{j_e} = 17.1 \quad (\text{når } b_l = 12 \text{ cm})$$

Stråling dominerer meget sterkt over varmedning ved en så stor spaltebredde. (I et dobbeltvindu med $b_l = 1.2 \text{ cm}$ ville $j_s/j_e = 1.71$.)

Selv om den er usynlig (konst utt i det infrarøde).

* Sjekk: $T_{io}^4 - T_{yo}^4 = 17.066 \cdot 10^8 K^4$; $4 \left(\frac{T_{io} + T_{yo}}{2} \right)^3 (T_{io} - T_{yo}) = 17.035 \cdot 10^8 K^4$

5

10. Ved tilstrekkelig stor b_e vil et luftstrømningsmønster som skissert settes opp av temperaturforskjellene. Lufta nær innerveggen varmes opp, stiger derfor opp siden den blir lettere, og avgir varme til den kalde ytterveggen på vei ned igjen. Et slikt strømningsmønster etableres allerede ved $b_e \approx 2\text{ cm}$ og ved $b_e = 12\text{ cm}$, som her, vil det gi et betydelig bidrag til varmetransporten fra innervegg til yttervegg. Bidraget vil dominere over varmeledning, og kan bli av tilsvarende størrelsesorden som strålingsbidraget.

11. Mineralull er, godt sett, en dobbel så effektiv varmeleder som luft. Likevel vil mineralull i luftgapet på 12 cm redusere varmestrømmen betydelig. Konveksjon blir umuliggjort og strålingsbidraget, som uten mineralull var 17 ganger så stort som bidraget fra varmeledning, blir minimert. Grunnen er at strålingen nå vil skje mellom nabo-"flater" i mineralullen med ubetydelig spaltebredder. Og siden forholdet $j_s/j_e \sim b_e$ blir strålingsbidraget neglisjerbart. Altså: Mineralullen fjerner effektivt konveksjon & stråling.

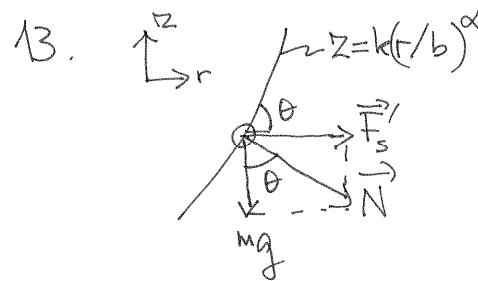
Diffusjonstett papp plasseres på innviden av mineralullen for å hindre at H_2O -komponenten i fuktig inneluft diffunderer ut gjennom

6

- mineralullen i veggen og (dersom temperaturfallet er stort nok) kondenserer til vann eller is. Ved $P_{\text{H}_2\text{O}} = P_1$, vil vann kondenseres ut ved avkjøling til T_1 . Ved $P_{\text{H}_2\text{O}} = P_2$, vil is kondenseres ut ved avkjøling til T_2 . Kondensert H_2O i veggen vil gi råte-problemer. Derfor diffusjonstett papp på innviden av mineralullen.

Oppgave B

12. Sentripetalkraften $\vec{F}_s$ er den kraften som skal til for å holde massen m i en sirkelbane med radius r og fart v , eller vinkelhastighet $\omega = v/r$.
- $$F_s = |\vec{F}_s| = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r ; \quad \vec{F}_s \text{ rettet inn mot sirkelbanens sentrum}$$



Sett fra kulas koordinatsystem, som roterer i horisontalplanet, må nettokraften $\vec{N}$ være vinkelrett på bøylen i dynamisk likevekt.

⑦

Dersom nettokrachten hadde en komponent langs bøyken, ville kule gli opp/med (alt ettersom). Kraften $\vec{N}$, som er summen av sentrifugalkraften $\vec{F}'_s = -\vec{F}_s$ (sentripetalkraften) og vekten, $-mg\hat{z}$, utbalanseres av en like stor normalkraft fra bøyken på kula, $-\vec{N}$. Av figuren ser vi at

$$\frac{|F'_s|}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g} = \tan\theta = \frac{dz}{dr} = \frac{\alpha k}{bx} r^{\alpha-1}$$

Altså

$$\omega^2 = \frac{\alpha k g}{bx^2} r^{\alpha-2} \Rightarrow \omega^2 = C r^{\alpha-2} \quad \text{ged.}$$

$C = \frac{g k \alpha}{b x^2}$

$\omega_m = \frac{g k \alpha}{b x^2}$

14. Newtons andre lov for rotasjon lyder

$$\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega)$$

Her er treghetsmomentet $I = 2 \cdot m r^2$, og siden både r & ω kan avhenge av tiden har vi

$$\frac{d}{dt}(2mr^2\omega) = 2mr^2 \frac{d\omega}{dt} + 2m\omega \frac{dr^2}{dt} = \tau = -\eta\omega \quad \text{ged.}$$

(for $r_0 < r(t) < r_m$)

15. Når friksjonen gir et dreiemoment $\tau = -\eta\omega$ på bøyken, vil energien avta og til slutt vil $r = r_0$ og $\omega = 0$. Det er svært vanskelig å

⑧

forestille seg annet enn at $r(t)$ vil avta jevnt og trutt fra r_m til r_0 . Men hva med $\omega(t)$? Når r avtar, vil I avta og derved er det faktisk tenkelig at $\omega(t)$ øker! Vi får se.

Først bestemmes $r(t)$, eller $r^2(t)$. Her er det lett å regne seg bort, og regningen kan gjennomføres på mange ekvivalente måter. F.eks: Divider den dynamiske ligningen med ω :

$$2mr^2 \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} + 2m \frac{dr^2}{dt} = -\eta$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{d}{dt} \ln \omega = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\ln C + \ln r^{\alpha-2}) = \frac{\alpha-2}{4} \frac{d \ln r^2}{dt} \\ &= \frac{\alpha-2}{4} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{dr^2}{dt} \end{aligned}$$

Altså

$$2m \left[\frac{\alpha-2}{4} + 1 \right] \frac{dr^2}{dt} = m \frac{\alpha+2}{2} \frac{dr^2}{dt} = -\eta$$

eller

$$\frac{dr^2}{dt} = -\frac{2\eta}{(\alpha+2)m} \Rightarrow r^2(t) = -Kt + \text{konst.}$$

$$r^2(0) = r_m^2 \Rightarrow$$

$r^2(t) = r_m^2 - Kt ; \quad K = \frac{2\eta}{(\alpha+2)m}$

Men r^2 kan ikke bli mindre enn r_0^2 . Det

(9)

skjer ved $t=t_0$:

$$r_0^2 = r_m^2 - kt_0 \Rightarrow t_0 = \frac{r_m^2 - r_0^2}{k} = \frac{(\alpha+2)m}{2\eta} (r_m^2 - r_0^2)$$

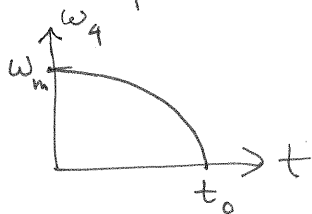
(dette er det ikke spurt om i oppgaven, men er en liten regning som klargjør hva som skjer)

16. Dette punktet kan løses uten at konstantene C og k er kjent som funksjoner av systemets parametre, dvs. uten å ha løst pkt 13 og 15:

$$\begin{aligned} \omega^2(t) &= C r^{\alpha-2} = C (r_m^2 - kt)^{\frac{\alpha-2}{2}} \\ &= C (r_m^2 - kt)^{\frac{\alpha-2}{2}} \end{aligned}$$

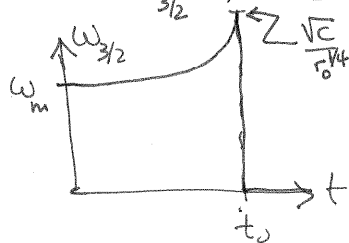
La først $\alpha=4$:

$$\omega_4^2(t) = C (r_m^2 - kt)^1 \Rightarrow \omega_4(t) = \sqrt{C} \sqrt{r_m^2 - kt}$$



Derneft: $\alpha = \frac{3}{2}$

$$\omega_{3/2}^2(t) = C (r_m^2 - kt)^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow \omega_{3/2}(t) = \frac{\sqrt{C}}{(r_m^2 - kt)^{1/8}}$$



Her øker ω som funksjon av t inntil $\omega_{3/2}(t_0) = \frac{\sqrt{C}}{r_0^{1/4}}$ som er maksimalverdien, for $\omega_{3/2} = 0$, for $t > t_0$.

(10)

i omdreiningssatsen

Skal den dynamiske likevekten uten friksjon eller med (liten!) friksjon være stabil, må $\alpha > 1$. Av regningene ser vi at $\omega(t)$ vil øke når $0 < t < t_0$ (med litt friksjon) dersom $1 < \alpha < 2$. *

På den annen side, dersom $\alpha > 2$ vil $\omega(t)$ avta med t når $0 < t < t_0$.

Dersom $\alpha = 2$, vil $\omega(t) = \omega_m$ i hele tidsintervallet $0 < t < t_0$.

For $t > t_0$ vil kulene ligge i ro ved r_0 , og vinkelhastigheten vil være $\omega = 0$, for hvilken som helst verdi av α !

Merk: Dette løsningsforslaget går mye mer detaljert til verks enn det er forventet av en eksamensbesvarelse.

(Førhåpentligvis til glede for senere studentkull som arbeider med gamle eksamensoppgaver)

* ω øker her, men $v = \omega r = \sqrt{C} r^{\frac{\alpha-2}{2} + 1} = \sqrt{C} r^{\frac{\alpha}{2}}$ vil avta (sammen med $r^{\alpha/2}$), uansett verdi på α .