

Løsningsforslag: Eksamen TFY4115, høsten 2007

I tilknytning til oppgavene finner du nedenfor utførlige diskusjoner og kommentarer av forskjellig slag. Dette må *ikke* forstås slik at kommentarer av denne typen var forventet i eksamensbesvarelsene! Diskusjonene er ment å utfylle løsningsforslagene, forhåpentlig til glede for deg som bruker dem i arbeidet med faget i tida fremover.

Oppgave 1

a. Den fullstendige løsningen av differensialligningen for en harmonisk oscillator drevet av en ytre, oscillerende kraft med konstant amplitude F_0 og konstant vinkelfrekvens ω , består av en partikulærdel som svinger med konstant amplitude og med den påtrykte frekvensen ω (se formelarket), pluss en homogen del som dempes ut. For en underdempet svingning har den homogene delen formen (gitt i formelarket):

$$x_h(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_d t - \delta),$$

der $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ og $\gamma = b/2m$. (Svingningen er underdempet når $\gamma < \omega_0$). Denne delen av den fullstendige løsningen dempes altså ut eksponensielt, som $\exp(-\gamma t)$, og blir neglisjerbar når $t \gg 1/\gamma = 4$ s, med de oppgitte tallene. Etter $t = 10$ s er homogendelens amplitude allerede redusert til ca. 8% av sin opprinnelige verdi. Når $t = 100$ s er den redusert med faktoren $1.4 \cdot 10^{-11}$. Det avhenger selvsagt av hvilke presisjonskrav en stiller, men grovt sett kan en si at etter drøye 10 s kan vi glemme den homogene delen av løsningen relativt partikulærløsningen.

b. Kondens fryser til is på frontruta når rutas temperatur blir tilstrekkelig lav til at luftas vanninnhold, gitt ved vanndampens partialtrykk, passerer det tilsvarende metningspunktet. Altså: Isroser dannes på ruta dersom partialtrykket fra vanndampen i lufta er høyere enn koeksistens-trykket (trykket for faseovergang mellom vanndamp og is) ved frontrutas temperatur. Det er opplyst i oppgaveteksten at dagen er stille og klar, med noen få kuldegrader. Ingen vind, ikke noe snøfall. Og, siden dagen er klar: Et partialtrykk for vanndamp som er lavere enn metningstrykket ved luftas temperatur. Oppgaveteksten burde presisert at vi ser bort fra mulig direktestråling fra sola. (Fordi begge parkeringsplassene ligger i skyggen, eventuelt at sola allerede er under horisonten.)

Dersom bilen står midt ute på en åpen parkeringsplass, vil en stor del av romvinkelen som sees fra frontruta, være åpen himmel. Himmelen stråler som et svart

legeme med temperatur i området (15,25) K under lufttemperaturen ved bakken. (Uten atmosfæren ville selvsagt innstrålingen fra universet være helt neglisjerbar.) Derved vil strålingsutvekslingen mellom frontruta og himmelen dra temperaturen nedover, og ruta blir lett så mye kaldere enn omgivelsene at vanndampens metningstrykk overskrides, og dampen kondenseres som is på ruta.

Dersom bilens frontrute vender inn mot en husvegg, vil romvinkelen som dekkes av himmelen, sett fra frontrutas synspunkt, reduseres til noe i nærheten av det halve i forhold til den åpne parkeringsplassen. Husveggen vil ha en temperatur som er essensielt den samme som luft-temperaturen. (Ørlite over på grunn av varmestrom innenfra, men denne ekstra-effekten er helt neglisjerbar i forhold til at himmel-romvinkelen er kraftig redusert. Et høyt gjerde eller et tre ville gjøre omtrent samme nytten som en husvegg.) Med kraftig redusert (negativ) drakraft fra himmel-temperaturen er sannsynligheten rimelig god for at temperaturen til frontruta holder så høy at vanndampens metningstrykk ikke overskrides. Da vil skrapejobben bortfalle av seg selv. Og skulle temperaturen på ruta likevel bli lav nok til at kondens dannes, vil det i alle fall dannes *mindre* is enn ute på den åpne parkeringsplassen.

Fysikken i dette problemet er den samme som for den isete asfaltveien i øving 13.

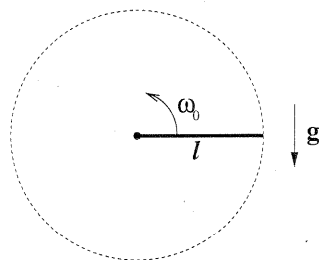
c. Varmeledningsligningen (se formelarket) lyder

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad ; \quad D_T = \frac{\kappa}{\rho c},$$

der κ er varmeledningsevnen og ρc er varmekapasiteten pr. volumenhet. Med de oppgitte tallene er $D_T^{\text{gran}} = (3/50) D_T^{\text{teinnull}}$. Vi kan regne med at $\partial^2 T / \partial x^2$ er omtrent den samme i de to veggene. Derved vil temperaturen midt i granveggen synke adskillig langsommere når utetemperaturen plutselig faller, enn temperaturen midt i reisverksveggen. Den fysiske mekanismen er klar: Selv om varmeledningen til gran er 3 ganger så høy for gran som for steinull, viser den store varmekapasiteten at en mengde energi må tømmes ut av granveggen før temperaturen midt i veggen har nådd sitt nye, stasjonære nivå.

Men! Når den stasjonære temperaturfordelingen er nådd (lineært temperaturfall gjennom veggen), vil granveggen slippe ut ca. 3 ganger så mye energi pr. tids- og flate-enhet som reisverksveggen. Med andre ord: Reiverkshytta er mer energioekonomisk enn tømmerhytta. Men dersom det slukner i ovnen mens du er ute på langtur i vinterferien, vil tømmerhytta holde bedre på varmen, på grunn av sin større varmekapasitet.

Oppgave 2



a. Vinkelhastigheten vil ikke endres idet festet ryker, når vi (som oppgitt) forutsetter at dette skjer instantant. Derimot vil omdreiningpunktet flytte seg fra stavens endepunkt til dens tyngdepunkt, midt på staven. Totalenergien vil heller ikke endres bare fordi opphenget ryker, og bevegelsesenergien må derfor være den samme før og like etter. Før opphenget ryker, er den kinetiske energien ren rotasjonsenergi relativt opphegningspunktet:

$$K = \frac{1}{2} I \omega_0^2, \quad \text{der} \quad I = I_0 + m(\ell/2)^2 = \frac{1}{3} m \ell^2,$$

når vi bruker treghetsmomentet rundt tyngdepunktet til en lang, tynn stav ($I_0 = m\ell^2/12$) og Steiners sats (se formelarket).

Rotasjonsenergien til staven *etter* at opphenget er røket, er knyttet til rotasjon rundt tyngdepunktet. Stavens vekt gir ikke noe dreiemoment om tyngdepunktet, så denne energien påvirkes ikke av tyngdens gravitasjon. Forholdet mellom rotasjonsenergien og den totale energien er da

$$\frac{K_{\text{rot}}}{K} = \frac{I_0 \omega_0^2 / 2}{I \omega_0^2 / 2} = \frac{I_0}{I} = \frac{1}{4}.$$

Umiddelbart etter at opphenget har røket, står derfor rotasjonsenergien for en firedel av den totale kinetiske energi. Resten må være energi knyttet til tyngdepunktsbevegelsen. La oss sjekke det:

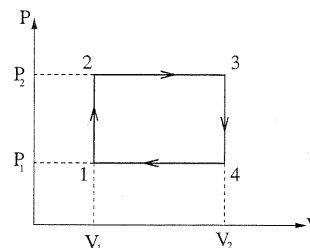
$$K_v = \frac{1}{2} m v_{tp}^2 = \frac{1}{2} m (\omega_0 \ell / 2)^2 = \frac{1}{8} m \omega_0^2,$$

som, ganske riktig, er tre ganger så stor som energien i rotasjonsbevegelsen. OK!

b. Når opphenget ryker, har tyngdepunktet hastigheten $v_{tp} = v_0 = \omega_0 \ell / 2$, rettet vertikalt oppover. Tyngdepunktets bane blir da langs vertikalaksen, som kastbevegelse i tyngdefeltet. Ved maksimalhøyden z_{max} er all kinetisk translasjonsenergi omgjort til potensiell energi (mens staven ufortrødent roterer videre, helt uavhengig av tyngdepunktets bevegelse):

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = m g z_{\text{max}} \Rightarrow z_{\text{max}} = \frac{\omega_0^2 \ell^2}{8g}.$$

Oppgave 3



a. For å uttrykke T_2 , T_3 og T_4 ved T_1 og forholdene $x = V_1/V_2$ og $y = P_1/P_2$ trengs bare tilstandsligningen for ett mol ideell gass, $PV = RT$. Den gir

$$T_2 = T_1 \frac{P_2}{P_1} = \frac{T_1}{y}; \quad T_4 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = \frac{T_1}{x}$$

$$T_3 = T_4 \frac{P_2}{P_1} = \frac{T_1}{xy}.$$

b. Siden alle prosessene her enten er isokore eller isobare, kan alle varmemengdene tilført eller avgitt uttrykkes direkte ved varmekapasitetene (pr. mol) C_V og $C_P = \gamma C_V$:

$$Q_{12} = C_V(T_2 - T_1) > 0; \quad Q_{23} = C_P(T_3 - T_2) > 0;$$

$$Q_{34} = C_V(T_4 - T_3) < 0; \quad Q_{41} = C_P(T_1 - T_4) < 0.$$

Her er Q_{ij} varmemengden tilført gassen (dersom $Q_{ij} > 0$) eller avgitt fra gassen til omgivelsene (dersom $Q_{ij} < 0$) i prosessen $i \rightarrow j$. Som første hovedsetning ($\Delta Q = \Delta U + \Delta W$) viser, tar C_P både vare på økningen i indre energi og arbeidet mot omgivelsene i den isobare prosessen. (Første hovedsetning: $\Delta Q = \Delta U + \Delta W = C_V \Delta T + P \Delta V = C_V \Delta T + R \Delta T = C_P \Delta T$.)

c. Av resultatene i pkt.a følger umiddelbart at dersom $T_4 = T_2$, er $y = x$ og derved er $T_1 = T_k = x^2 T_3 = x^2 T_v$.

d. Definisjonen av en varmekraftmaskins virkningsgrad er $\varepsilon = W/Q_v$ (formelarket), der W er arbeidet utført i en kretsprosess, og Q_v er den totale varmemengden absorbert av arbeidsmediet i prosessen. I vårt tilfelle er $Q_v = Q_{12} + Q_{23}$. Siden den indre energien U er en tilstandsfunksjon, må $\Delta U = 0$ i enhver kretsprosess. Derved gir første hovedsetning at $W = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}$, og

$$\varepsilon = 1 - \frac{|Q_{\text{ut}}|}{Q_{\text{inn}}} = \frac{Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}}{Q_{12} + Q_{23}}$$

$$= \frac{C_V(T_2 - T_1) + \gamma C_V(T_3 - T_2) - C_V(T_3 - T_4) - \gamma C_V(T_4 - T_1)}{C_V(T_2 - T_1) + \gamma C_V(T_3 - T_2)}$$

$$= \frac{T_3[x - x^2 + \gamma(1 - x) - (1 - x) - \gamma(x - x^2)]}{T_3[x - x^2 + \gamma(1 - x)]} = \frac{x + \gamma - 1 - \gamma x}{x + \gamma}$$

$$= (1 - x) \frac{\gamma - 1}{x + \gamma}.$$

Når dette skal sammenlignes med virkningsgraden $\varepsilon_C = 1 - T_k/T_v = 1 - x^2$ til Carnot-prosessen mellom varmereservoarer ved høyeste (T_v) og laveste (T_k) temperatur, er det lett å overbevise seg om at $\varepsilon < \varepsilon_C$. Dette kan gjøres ved å sette inn noen verdier for x og γ eller, mer presist, å vise at

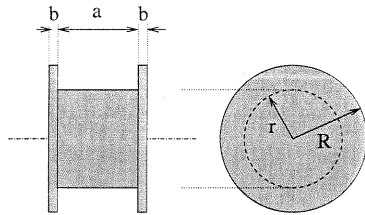
$$1 - x^2 > (1 - x) \frac{\gamma - 1}{x + \gamma} \Rightarrow (1 + x)(x + \gamma) > \gamma - 1 \Rightarrow 1 + x + x^2 + x\gamma > 0.$$

Det siste er åpenbart tilfelle for $0 < x < 1$, uansett verdi for γ .

Kommentar:

Den kretsprosessen vi her har regnet på er, i likhet med Carnot-prosessen, en *idealisert* prosess, uten tap av noe slag. Alle delprosessene er kvasistatiske, uten dissipasjon, slik *alle* prosesser som (i god nok tilnærming) lar seg fremstille ved kurver gjennom likevektstilstander er det. Hvorfor er da $\varepsilon < \varepsilon_C$? Grunnen er triviell: Carnot-prosessen er en prosess der *all* absorbert varme tilføres ved den høyeste temperaturen, T_v , mens *all* avgitt varme avgis ved den laveste, T_k . Virkningsgraden er større jo større forholdet T_v/T_k er. I "vår" prosess blir varme absorbert ved alle temperaturer mellom T_k og T_v , og varme avgis også ved alle slike mellomliggende temperaturer. Hvis vi tenker oss vår prosess som sammensatt av et stort antall Carnotprosesser mellom temperaturer i intervallet (T_k, T_v), er det ikke underlig at $\varepsilon < \varepsilon_C$.

Oppgave 4



Figur 1

a. Snellen består av tre sylindre, med total masse

$$M = \rho(\pi r^2 \cdot a + \pi R^2 \cdot 2b).$$

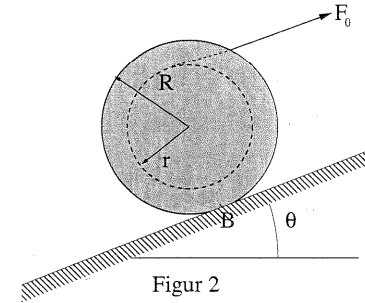
Tilsvarende er treghetsmomentet en kombinasjon av sylindrenes treghetsmomenter (de har felles symmetriakse gjennom tyngdepunktet):

$$I_0 = \frac{1}{2} \rho (\pi r^2 \cdot a \cdot r^2 + \pi R^2 \cdot 2b \cdot R^2).$$

Når treghetsmomentet for snellen som helhet skrives på formen $I_0 = \frac{1}{2} \sigma M R^2$, er σ gitt som

$$\sigma = \frac{2I_0}{MR^2} = \frac{\rho \pi (ar^4 + 2bR^4)}{\rho \pi R^2 (ar^2 + 2bR^2)} = \frac{1 + \alpha s^4}{1 + \alpha s^2},$$

der $\alpha = a/2b$ og $s = r/R$. Resultatet kan sjekkes i de tre grensene $a \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow 0$), $s \rightarrow 1$ og $b \rightarrow 0$. I begge de to første grensene er resultatet en massiv sylinder med radius R . Dette stemmer med at $\sigma \rightarrow 1$ i begge disse grensene. I det tredje tilfellet er resultatet en massiv sylinder med radius r , og dette stemmer med at $\alpha \rightarrow \infty$ og derved $\sigma \rightarrow (r/R)^2$ i denne grensen.



Figur 2

b. Likevektsbetingelsene lyder: Summen av alle krefter som virker på snellen må være null, og *dessuten* må summen av alle dreiemomenter som virker på snellen være null, *uansett* hvilket felles referansepunkt som velges for dreiemomentene:

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \text{og} \quad \sum \tau = 0.$$

Foruten kraften $\mathbf{F}_0$ vist på figuren, virker det en friksjonskraft $\mathbf{f}_0$ parallelt med skråplanet i berøringspunktet B. Vi velger fortegnet til f_0 positivt dersom friksjonskraften virker *oppover* langs skråplanet.

Dessuten virker kraften Mg i snellens tyngdepunkt, rettet vertikalt nedover. Normalkomponenten $N = Mg \cos \theta$ er kompensert av en normalkraft $\mathbf{N}_s = -N$ fra skråplanet på snellen.

Vi forutsetter at snellen ikke sklir. Kraftlikevekt langs skråplanet gir da

$$F_0 + f_0 - Mg \sin \theta = 0.$$

Dersom vi velger referansepunktet for dreiemomentene på snellens symmetriakse, forsvinner bidraget fra snellens vekt, og likevektskravet for dreiemomentene blir

$$F_0 r - f_0 R = 0.$$

Dette gir to ligninger til bestemmelse av de to ukjente, F_0 og f_0 .

Alternativt kunne vi valgt berøringspunktet B som referansepunkt for dreiemomentene. Da vil f_0 ikke bidra, mens vekten som angriper i tyngdepunktet vil. Summen av dreiemomenter blir da

$$F_0(R + r) - Mg \sin \theta \cdot R = 0.$$

Denne ligningen gir F_0 direkte som

$$F_0 = \frac{Mg \sin \theta}{1 + r/R} = \frac{Mg \sin \theta}{1 + s}.$$

Vi finner det samme uttrykket for F_0 om vi bruker de to ligningene med referansepunktet i symmetriaksen (sjekk det!).

c. Når F_0 er kjent, følger f_0 av den andre ligningen under pkt.b som $f_0 = (r/R)F_0 = sF_0$. Forutsetningen at snellen ikke sklir er bare oppfylt dersom $f_0 \leq \mu_s N$, der μ_s er den statiske friksjonskoeffisienten mellom snelle og skråplan. I vårt tilfelle får denne betingelsen formen

$$\frac{Mg \sin \theta \cdot s}{1 + s} \leq \mu_s Mg \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \mu_s \geq \frac{s}{1 + s} \tan \theta.$$

d. Vi øker nå at kraften F i tråden, slik at den blir større enn F_0 . Vi forutsetter at μ_s er stor nok til at vi får ren rulling. Da vil snellen rulle oppover skråplanet med tyngdepunktsakselerasjonen $a = R\dot{\omega}$, der vi har valgt vinkelhastigheten som positiv når sylindere dreier *med klokka*. Newtons 2. lov for translasjon lyder nå

$$F + f - Mg \sin \theta = Ma.$$

Merk at når $F > F_0$, blir friksjonskraften $f \neq f_0$. (Forskjellig, men ikke nødvendigvis større!) Med referansepunktet på sylinderaksen lyder da Newtons 2. lov for rotasjon,

$$Fr - fR = I_0 \cdot (a/R).$$

Igjen to ligninger. Denne gangen er F gitt og de to ukjente er f og a .

Også i denne sammenhengen kan vi velge referansepunktet som berøringspunktet B. Men da må vi huske på at om *dette* punktet er sylindereens treghetsmoment $I = I_0 + MR^2 = (1 + \frac{1}{2}\sigma)MR^2$, der vi brukte Steiners sats. Newtons 2. for rotasjon får nå formen

$$\begin{aligned} F(R+r) - Mg \sin \theta \cdot R &= I \cdot (a/R) = (1 + \frac{1}{2}\sigma)MR \cdot a \\ a &= \frac{F(1+s) - Mg \sin \theta}{M(1 + \sigma/2)}. \end{aligned}$$

Nok en gang én ligning med én ukjent, a . Sjekk at du får samme svar om du løser de to ligningene med de to ukjente a og f !

e. Den ukjente friksjonskraften f kan nå bestemmes av (f.eks.) den andre ligningen i pkt.d:

$$\begin{aligned} f &= sF - \frac{\sigma}{2}Ma = \frac{Fs(1 + \sigma/2) - (\sigma/2)[F(1 + s) - Mg \sin \theta]}{1 + \sigma/2} \\ &= \frac{F(s - \sigma/2) + (\sigma/2)Mg \sin \theta}{1 + \sigma/2}. \end{aligned}$$

Det fremgår av dette uttrykket at f ikke nødvendigvis er positiv: Dersom $s < \sigma/2$ og F er tilstrekkelig stor til at F -leddet er større enn Mg -leddet, blir f negativ. Det vil si at friksjonskraften peker *nedover* langs skråplanet. Dette kan en også innse uten regning. Når s blir svært liten og en drar hardt nok i tråden, vil nødvendigvis friksjonskraften måtte peke nedover skråplanet. (Enig?)