

**TFY4115 Fysikk** (MTELSYS/MTTK/MTNANO)  
**Eksamen TFY4115 10. aug. 2012.**  
**Løsningsforslag**

**Oppgave 1. Flervalgsoppgaver**

|            |   |   |   |   |   |   |   |   |
|------------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Oppgave:   | a | b | c | d | e | f | g | h |
| Rett svar: | E | C | A | C | B | D | B | A |

**Detaljer om spørsmålene:**

**a.** E. Normalkraft normalt opp fra underlaget, friksjonskraft på langs oppover underlaget, tyngdekrafta rett nedover.

**b.** C. En massiv sylinder har  $I = \frac{1}{2}mR^2$ . Kin.energi er  $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2(v/R)^2 = \frac{3}{4}mv^2$ .

**c.** A. Landingen på karusellen er et uelastisk støt, så (mekanisk) energi  $E$  for systemet kan ikke være bevart. Akslingen som står fast i bakken, virker på systemet med en kraft når studenten lander. Dermed kan heller ikke systemets bevegelsesmengde  $p$  være bevart. Men denne kraften fra akslingen representerer ikke noe kraftmoment mhp. en akse gjennom karusellens sentrum, slik at spinnet  $L$  er bevart.

**d.** C. Når kulene henger sammen er dette et fullstendig uelastisk støt, og det vil tapes energi. Under en kollisjon uten ytre krefter er alltid  $p$  og  $L$  bevart (her er sammenhengen  $L = \ell p$  for hver av kulene, der  $\ell$  er snorlengden).

**e.** B. Fart til venstre kule før støt fra energibevarelse  $mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1^2 = 2gh$ . Med  $v'$  = fellesfarten etter støtet gir bevaring av bevegelsesmengden:  $mv_1 = 2mv'$ . Energibevaring etter støtet gir:  $2mgH = \frac{1}{2}(2m)v'^2$ , som gir  $H = \frac{1}{2} \frac{v'^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{4g} = \frac{1}{2} \frac{2gh}{4g} = \frac{h}{4}$ .

**f.** D. I metta damp er trykket kun avhengig av temperaturen. Om f.eks. volumet øker vil mer væske fordampe og opprettholde trykket.

**g.** B. Ved adiabatisk ekspansjon faller temperaturen fordi  $\Delta U = W < 0$ . Areal under  $pV$ -kurve og dermed arbeidet er mindre enn for isoterm, uansett temperatur og  $V_2/V_1$ .

OBS: Det burde vært presisert at starttilstanden er lik i begge tilfeller. Dersom det er slutttilstanden som er lik vil C være rett svar. Oppgaven derfor trukket ut av bedømmelsen (ingen hadde rett svar).

**h.** A. Ekvipartisjonsprinsippet sier at energien fordeles med  $\frac{1}{2}k_B T$  per frihetsgrad per molekyl, uansett masse. Per atom blir det derfor like mye (indre) energi  $U$  for de to enatomige gassene siden begge har tre frihetsgrader.

**Oppgave 2.**

**a.** I tillegg til kreftene tegnet på figuren i oppgaven virker tyngdekrafta  $Mg$  rett nedover midt på stanga. Likevekt i  $x$ - og  $y$ -retning gir

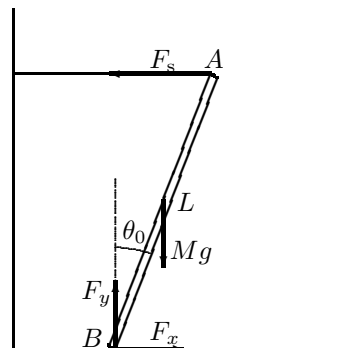
$$F_y = Mg \quad \text{og} \quad F_x = F_s$$

Videre har vi rotasjonslikevekt om punktet B:

$$Mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin \theta_0 = F_s \cdot L \cos \theta_0 \quad \Rightarrow \quad F_s = Mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \tan \theta_0.$$

Da har vi bestemt  $F_s$ , og ergo blir

$$\underline{F_x = F_s = Mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \tan \theta_0} \quad \text{og} \quad \underline{F_y = Mg}.$$



**b.** Vi bruker Steiners sats (parallellakse-teoremet) til å finne  $I$  om endepunktet, som er i avstand  $\frac{L}{2}$  fra tyngdepunktet:

$$I = I_{\text{cm}} + M \left( \frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M \left( \frac{L}{2} \right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{3}ML^2}}.$$

Kan også integrere, med  $dm = d\ell \cdot M/L$ :

$$I = \int_0^L \ell^2 d\ell \cdot M/L = \frac{M}{L} \cdot \left[ \frac{1}{3} \ell^3 \right]_0^L = \underline{\underline{\frac{1}{3}ML^2}}.$$

c. Bevegelsen kan sees på som rein rotasjon om B, slik at kin. energi er kun rotasjonsenergi  $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{6}ML^2\omega^2$ . Energi ved  $\theta_0$  lik energi ved vilkårlig  $\theta$ :

$$0 + Mg \frac{L}{2} \cos \theta_0 = \frac{1}{6}ML^2\omega^2 + Mg \frac{L}{2} \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos \theta_0 - \cos \theta)}$$

### Oppgave 3.

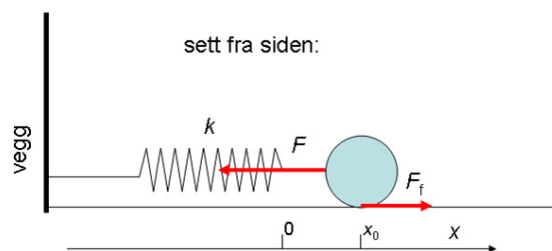
a. Fjærkrafta  $F = -kx$  er positiv mot høyre (negativ for positiv  $x$ ). Fjærkrafta gir en akselerasjon  $a = \ddot{x}$ . Newton 2 på akslingen med kuler (masse  $2 \cdot M/2 = M$ ):

$$\sum F = M\ddot{x} = -kx, \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{M}x = 0,$$

som vi gjenkjenner som en harmonisk oscillasjon med  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$  og svingetid

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1,00 \text{ kg}}{200 \text{ kg/s}^2}} = \underline{0,44 \text{ s.}}$$

b. Fjærkrafta virker mot venstre og for at kula skal roterasjonsakselerere fra å være i ro til å rotere mot klokka, må friksjonskrafta  $F_f$  ha retning mot høyre.  $F_f$  virker i kontaktpunktet mot underlaget.  $F$  må være større enn  $F_f$  for at kula skal få translasjonsakselerasjon mot venstre.



c. Med rotasjonsakselerasjon  $\alpha$  og translasjonsakselerasjon  $a$  er betingelsen  $a = \alpha R$  for rein rulling oppfylt.  $F_f$  er stor nok til at grensa  $F_{f,\max} = \mu_s Mg$  ikke er nådd. Newton 2 for rotasjon:

$$\tau = F_f R = I\alpha = I \frac{a}{R},$$

der treghetsmomentet for de to kulene er  $I = 2 \cdot \frac{2}{5} \frac{M}{2} R^2 = \frac{2}{5} MR^2$ . Dette gir

$$F_f R = \frac{2}{5} MR^2 \frac{a}{R} \quad \Rightarrow \quad \underline{F_f = \frac{2}{5} Ma}.$$

d. Akselerasjonen har retning mot venstre, men vi regner  $a$  uten fortegn (positiv) i følgende regning. Med fjærkraft  $F = -kx_0$  (mot venstre) og  $F_f = +\frac{2}{5} Ma$  (mot høyre) i ytterpunktet, gir N2

$$\sum F = F + F_f = -kx_0 + \frac{2}{5} Ma = -Ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{5}{7} \cdot \frac{kx_0}{M} = \frac{5}{7} \cdot \frac{200 \text{ N/m} \cdot 0,100 \text{ m}}{1,00 \text{ kg}} = \underline{14,3 \text{ m/s}^2}.$$

e. Skal rotasjonsakselerasjonen følge med lineær akselerasjon må (fra uttrykk i c.):

$$F_f = \frac{2}{5} Ma = \frac{2}{5} \cdot 1,00 \text{ kg} \cdot 14,3 \text{ m/s}^2 = 5,72 \text{ N}$$

Og med grensetilfellet  $F_f = F_{f,\max} = \mu_s Mg$  får vi

$$\mu_s Mg = \frac{2}{5} Ma \quad \Rightarrow \quad \mu_s = \frac{a}{g} \frac{2}{5} = \frac{14,3}{9,81} \cdot \frac{2}{5} = \underline{0,58}.$$

Kontroll: I høyre ytterstilling er fjærkraft  $= kx_0 = 200 \text{ N/m} \cdot 0,10 \text{ m} = 20 \text{ N}$  mot venstre mens friksjonskraft (funnet over)  $F_f = 5,72 \text{ N}$  mot høyre. Dette gir lineær akselerasjon  $|a| = \frac{\sum F}{M} = \frac{kx_0 - F_f}{M} = \frac{14,3 \text{ N}}{1,00 \text{ kg}} = 14,3 \text{ m/s}^2$ , som stemmer.

#### Oppgave 4.

**a.** Antall mol fra ideell gasslov:

$$n_A = n_B \equiv n = \frac{p_{A,0} V_{A,0}}{RT_{A,0}} = \frac{101300 \text{ N/m}^2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{8,314 \text{ J/(K mol)} \cdot 273 \text{ K}} = 2,232 \text{ mol} = \underline{\underline{2,23 \text{ mol}}}$$

**b.** Bestemmer sluttvolumet i B fra adiabatlikningen. For enatomig gass er  $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5/2}{3/2} = \frac{5}{3}$  (OBS: ble oppgitt under eksamen).

$$p_B V_B^\gamma = p_{B,0} V_{B,0}^\gamma \Rightarrow V_B = V_{B,0} \cdot \left( \frac{p_{B,0}}{p_B} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_{B,0} \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^{\frac{3}{5}} = V_{B,0} \cdot 0,5173 = 2,586 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = \underline{\underline{2,59 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}}$$

$$V_A = (V_{A,0} + V_{B,0}) - V_B = 2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 - 2,586 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 7,414 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = \underline{\underline{7,41 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}}$$

**c.** Temperaturene bestemmes enklest fra ideell gasslov:

$$T_A = \frac{p_A V_A}{nR} = \frac{3 \cdot 101300 \text{ N/m}^2 \cdot 7,414 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{2,232 \text{ mol} \cdot 8,314 \text{ J/(K mol)}} = \underline{\underline{1214 \text{ K}}}.$$

$$T_B = \frac{p_B V_B}{n_B R} = \frac{3 \cdot 101300 \text{ N/m}^2 \cdot 2,586 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{2,232 \text{ mol} \cdot 8,314 \text{ J/(K mol)}} = 423,5 \text{ K} = \underline{\underline{424 \text{ K}}}.$$

**d.** Betrakt totalsystemet A+B, dette gjør intet ytre arbeid da totalvolumet er konstant. Ved bruk av 1.lov på totalsystemet får vi da:

$$dQ = dU_{\text{tot}} + dW_{\text{tot}} = dU_A + dU_B + 0$$

For monoatomær ideell gass er  $C_V = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2} R$  slik at  $dU = nC_V dT$ . Dermed er

$$Q = C_{V,A}(T_A - T_{A,0}) + C_{V,B}(T_B - T_{B,0}) = \frac{3}{2} nR(T_A - T_{A,0}) + \frac{3}{2} nR(T_B - T_{B,0})$$

Med  $n = 2,232 \text{ mol}$ ,  $R = 8,312 \text{ J/(K mol)}$ ,  $T_B = 423,5 \text{ K}$ ,  $T_A = 1214 \text{ K}$ ,  $T_{A,0} = T_{B,0} = 273 \text{ K}$ , får vi

$$Q = 26,19 \text{ kJ} + 4,19 \text{ kJ} = 30,38 \text{ kJ} = \underline{\underline{30,4 \text{ kJ}}}.$$

Kunne også betraktet system A:  $Q = Q_A = \Delta U_A + W_A$ . Men  $W_A$  er litt ekkelt å beregne men finnes enklest fra:  $W_A = -W_B = \Delta U_B$  (fordi adiabatisk prosess i B), og vi ender opp med samme likningen som over.

**e.** Prosessen i B er reversibel og adiabatisk, da er

$$\underline{\underline{\Delta S_B = 0.}}$$

For A er det enkleste (og fullt tillatt) å bruke følgende formel for ideell gass fra formelark:

$$\Delta S_{12} = nC_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1} \quad \text{her:} \quad \Delta S_A = nC_V \ln \frac{T_A}{T_{A,0}} + nR \ln \frac{V_A}{V_{A,0}}$$

Tallverdier:

$$\Delta S_A = 2,23 \text{ mol} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8,314 \text{ J/(K mol)} \cdot \ln \frac{1214}{273} + 2,23 \text{ mol} \cdot 8,314 \text{ J/(K mol)} \cdot \ln \frac{7,414}{5,0} = \underline{\underline{48,8 \text{ J/K}}}$$

Kan evt. også beregne  $\Delta S_B$ :

$$\Delta S_B = nC_V \ln \frac{T_B}{T_{B,0}} + nR \ln \frac{V_B}{V_{B,0}} = 2,23 \text{ mol} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8,314 \text{ J/(K mol)} \cdot \ln \frac{423}{273} + 2,23 \text{ mol} \cdot 8,314 \text{ J/(K mol)} \cdot \ln \frac{2,586}{5,0} = \underline{\underline{0,0 \text{ J/K}}}$$

Alternativ utregning fra at entropien  $S$  er en tilstandsfunksjon og bruk av en alternativ isobar + isokor prosess for gass A. Vi lar 0=starttilstand ( $p_{A,0}, V_{A,0}$ ), 2=tilstand med  $(p, V) = (p_{A,0}, V_A)$  og 1=slutttilstand ( $p_A, V_A$ ), der 0-2 er en isobar prosess og 2-1 er en isokor prosess. Temperaturen i mellomtilstanden er

$$T_2 = \frac{p_{A,0} V_A}{nR} = p_{A,0} V_A \cdot \frac{T_{A,0}}{p_{A,0} V_{A,0}} = T_{A,0} \cdot \frac{V_A}{V_{A,0}}$$

Da er

$$\Delta S_A = \int_0^2 \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} + \int_2^1 \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = \int_0^2 \frac{C_p dT}{T} + \int_2^1 \frac{C_V dT}{T} = C_p \ln \frac{T_2}{T_{A,0}} + C_V \ln \frac{T_A}{T_2}$$

Nå er  $C_p = C_V + nR$ :

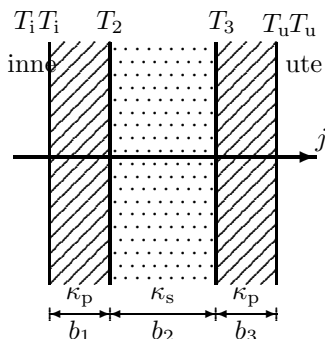
$$\Delta S_A = nR \ln \frac{T_2}{T_{A,0}} + C_V \ln \left( \frac{T_2}{T_{A,0}} \cdot \frac{T_A}{T_2} \right) = nR \ln \frac{V_A}{V_{A,0}} + C_V \ln \frac{T_A}{T_{A,0}}, \quad \text{som over.}$$

### Oppgave 5.

**a.** Varmetransport i materialer følger Fouriers varmeledningslikning:  $j = -\kappa dT/dx$ . For det tilfellet at en har stasjonær varmeledning gjennom en plate med tykkelse  $b$  gir dette (når varmestrømtettheten regnes positiv og  $\Delta T$  er temperaturforskjellen mellom platens to sider)

$$j = \frac{\kappa}{b} \Delta T.$$

Denne likningen er helt analog med Ohms lov for likestrøm, med  $\Delta T$  i rollen som elektrisk spenning,  $j$  som elektrisk strøm, og  $b/\kappa$  i rollen som elektrisk motstand. En lagdelt vegg er helt analog en seriekopling av elektriske motstander.



Å se bort fra varmeovergangseffekt betyr at paneloverflate inne og ute har samme temperatur som henholdsvis lufta ute og inne, Varmestrømtettheten over hvert enkelt lag kan uttrykkes

$$j = \kappa_p/b_1 \cdot (T_i - T_2) \quad (1)$$

$$j = \kappa_s/b_2 \cdot (T_2 - T_3) \quad (2)$$

$$j = \kappa_p/b_3 \cdot (T_3 - T_u) \quad (3)$$

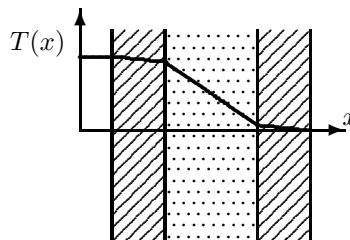
Alle disse varmestrømmer  $j$  må være like, ellers ville interne temperaturer endres over tid. Divisjon v hver likning med koeffisienten foran  $\Delta T$  på høyre side av likningen og deretter sum av alle likninger gir følgende uttrykk, og deretter innsetting av tallverdier:

$$j = \frac{T_i - T_u}{b_1/\kappa_p + b_2/\kappa_s + b_3/\kappa_p} \quad (4)$$

$$= \frac{22 - 5}{0,02/0,14 + 0,10/0,047 + 0,025/0,14} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (5)$$

$$= \frac{17}{0,142 + 0,179 + 2,128} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = \frac{17}{2,449} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = \underline{6,94 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}. \quad (6)$$

**b.** Temperaturen faller lite gjennom panelveggen med høy varmeledningsevne (dårlig isolasjon) og mye gjennom steinullaget med lav varmeledningsevne. Figur til høyre.



**c.** Temperaturen  $T_2$  på yttersida av innerpanelet finner vi fra (1). Skriver temperaturene i  $^{\circ}\text{C}$ :

$$T_2 = T_i - j \cdot b_1/\kappa_p = (22,0 - 6,94 \cdot 0,142)^{\circ}\text{C} = (22,00 - 0,985)^{\circ}\text{C} = \underline{21,0^{\circ}\text{C}} \quad (294 \text{ K}).$$