

Eksamen TFY4145/FY1001 12. aug. 2013.

Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver

Oppgave:	a	b	c	d	e	f	g	h
Rett svar:	E	C	C	B	B	D	B	A

Detaljer om spørsmålene:

a. E. Normalkraft normalt opp fra underlaget, friksjonskraft på langs oppover underlaget, tyngdekrafta rett nedover.

b. C. En massiv sylinder har $I = \frac{1}{2}mR^2$. Kin.energi er $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2(v/R)^2 = \frac{3}{4}mv^2$.

c. C. Når kulene henger sammen er dette et fullstendig uelastisk støt, og det vil tapes energi. Under en kollisjon uten ytre krefter er alltid p og L bevart (her er sammenhengen $L = \ell p$ for hver av kulene, der ℓ er snorlengden).

d. B. Fart til venstre kule før støt fra energibevarelse $mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1^2 = 2gh$. Med v' = fellesfarten etter støtet gir bevaring av bevegelsesmengden: $mv_1 = 2mv'$. Energibevaring etter støtet gir: $2mgH = \frac{1}{2}(2m)v'^2$, som gir $H = \frac{1}{2} \frac{v'^2}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{4g} = \frac{1}{2} \frac{2gh}{4g} = \frac{h}{4}$.

e. B. Arbeid W = varme inn - varme ut. Effektivitet $e = \frac{W}{Q_{\text{inn}}} = \frac{Q_{\text{inn}} - Q_{\text{ut}}}{Q_{\text{inn}}} = \frac{64 - 42}{64} = 0,34$.

f. D. I metta damp er trykket kun avhengig av temperaturen. Om f.eks. volumet øker vil mer væske fordampe og opprettholde trykket.

g. B. Ved adiabatisk ekspansjon faller temperaturen fordi $\Delta U = W < 0$. Areal under pV -kurve og dermed arbeidet er mindre enn for isoterm, uansett temperatur og V_2/V_1 .

h. A. Ekvipartisjonsprinsippet sier at energien fordeles med $\frac{1}{2}k_B T$ per frihetsgrad per molekyl, uansett masse. Per atom blir det derfor like mye (indre) energi U for de to enatomige gassene siden begge har tre frihetsgrader.

Oppgave 2.

a. I tillegg til kreftene tegnet på figuren i oppgaven virker tyngdekrafta Mg rett nedover midt på stanga. Likevekt i x - og y -retning gir

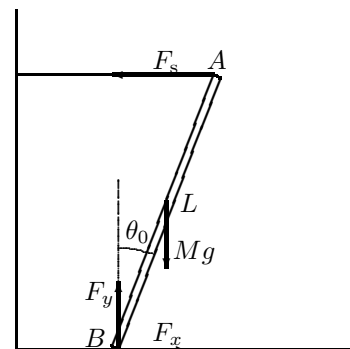
$$F_y = Mg \quad \text{og} \quad F_x = F_s$$

Videre har vi rotasjonslikevekt om punktet B:

$$Mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin \theta_0 = F_s \cdot L \cos \theta_0 \quad \Rightarrow \quad F_s = Mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \tan \theta_0.$$

Da har vi bestemt F_s , og ergo blir

$$\underline{F_x = F_s = Mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \tan \theta_0} \quad \text{og} \quad \underline{F_y = Mg}.$$



b. Fordi F_x utgjøres kun av friksjonen, må $F_x = \mu_s F_N = \mu_s F_y = \mu_s Mg$. Sammen med uttrykket for F_x over får vi da

$$\mu_s Mg = Mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \tan \theta_0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\mu_s = \frac{\tan \theta_0}{2} = \frac{\tan 30^\circ}{2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} = 0,289}.$$

Dette er minste verdien μ_s kan ha for at stanga ikke skal skli.

c. Vi bruker Steiners sats (parallellakse-teoremet) til å finne I om endepunktet, som er i avstand $\frac{L}{2}$ fra tyngdepunktet:

$$I = I_{\text{cm}} + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} M L^2 + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{3} M L^2}}.$$

Kan også integrere, med $dm = d\ell \cdot M/L$:

$$I = \int_0^L \ell^2 d\ell \cdot M/L = \frac{M}{L} \cdot \left[\frac{1}{3} \ell^3 \right]_0^L = \underline{\underline{\frac{1}{3} M L^2}}.$$

d. Newtons 2. lov for rotasjon:

$$\tau = I\alpha \quad \Rightarrow \quad M g \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin \theta = \frac{1}{3} M L^2 \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = \frac{g}{L} \cdot \frac{3}{2} \sin \theta}}.$$

e. Bevegelsen kan sees på som rein rotasjon om B, slik at kin. energi er kun rotasjonsenergi $\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{6} M L^2 \omega^2$. Energi ved θ_0 lik energi ved vilkårlig θ :

$$0 + M g \frac{L}{2} \cos \theta_0 = \frac{1}{6} M L^2 \omega^2 + M g \frac{L}{2} \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{3g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta)}}}$$

Man vil kunne verifisere ved derivasjon at $\dot{\omega} = \alpha$.

Oppgave 3.

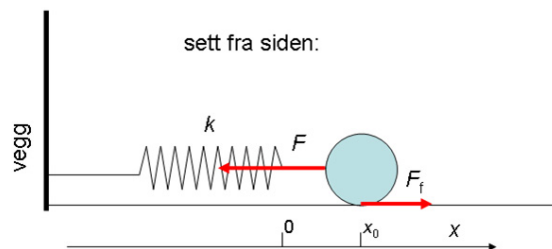
a. Fjærkrafta $F = -kx$ er positiv mot høyre (negativ for positiv x). Fjærkrafta gir en akselerasjon $a = \ddot{x}$. Newton 2 på akslingen med kuler (masse $2 \cdot M/2 = M$):

$$\sum F = M\ddot{x} = -kx, \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{M}x = 0,$$

som vi gjenkjenner som en harmonisk oscillasjon med $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ og svingetid

$$\underline{\underline{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{1,00 \text{ kg}}{200 \text{ kg/s}^2} = 0,44 \text{ s}}.}$$

b. Fjærkrafta virker mot venstre og for at kula skal roterasjonsakselerere fra å være i ro til å rotere mot klokka, må friksjonskrafta F_f ha retning mot høyre. F_f virker i kontaktpunktet mot underlaget. F må være større enn F_f for at kula skal få translasjonsakselerasjon mot venstre.



c. Med rotasjonsakselerasjon α og translasjonsakselerasjon a er betingelsen $a = \alpha R$ for rein rulling oppfylt. F_f er stor nok til at grensa $F_{f,\text{max}} = \mu_s M g$ ikke er nådd. Newton 2 for rotasjon:

$$\tau = F_f R = I\alpha = I \frac{a}{R},$$

der treghetsmomentet for de to kulene er $I = 2 \cdot \frac{2}{5} \frac{M}{2} R^2 = \frac{2}{5} M R^2$. Dette gir

$$F_f R = \frac{2}{5} M R^2 \frac{a}{R} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F_f = \frac{2}{5} M a}}.$$

Oppgave 4.

a.

$$\underline{n} = \frac{p_A V_A}{RT_A} = \frac{101,3 \text{ kPa} \cdot 4,0 \text{ dm}^3}{8,314 \cdot 300 \text{ J/mol}} = 0,16246 \text{ mol} = \underline{0,163 \text{ mol}}$$

Vi får i videre regning ofte bruk for $nR = 1,3507 \text{ J/K}$.

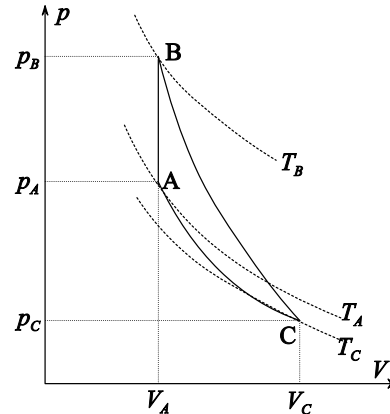
b. Enatomig gass har tre translasjonsfrihetsgrader slik at $C_V = \frac{3}{2}R$ og $C_p = C_V + R = \frac{5}{2}R$ og dermed $\underline{\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3}}$

Isoterm: $pV = nRT = \text{konst.} \Rightarrow p \propto V^{-1}$

Adiabater: $pV^\gamma = \text{konst.} \Rightarrow p \propto V^{-\gamma} = V^{-5/3} = V^{-1,667}$

Prosessen $pV^{5/2} = \text{konstant} \Rightarrow p \propto V^{-5/2} = V^{-2,5}$

Isoterm har altså slakest kurve mens BC-prosessen med $pV^{5/2} = \text{konstant}$ har brattest kurve og med adiabaten CA midt imellom. Dette er brukt ved inntegning av prosessene i pV -diagrammet samt isotermene med $T_C < T_A < T_B$.



c. Fra formelark:

$$\Delta S_{AB} = nC_V \ln \frac{T_B}{T_A} = \frac{3}{2} \cdot nR \cdot \ln \frac{T_B}{T_A} = \frac{3}{2} \cdot 1,3507 \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot \ln \frac{450}{300} = \underline{0,821 \frac{\text{J}}{\text{K}}}.$$

eller fra definisjon:

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{nC_V dT}{T} = nC_V \cdot \ln \frac{T_B}{T_A}$$

For den reversible, adiabatiske prosess CA er entropiendring null, idet $dQ_{\text{rev}} = 0$, $\underline{\Delta S_{CA} = 0}$.

Fordi S er en tilstandsfunksjon er for den sykliske, reversible, prosessen $\Delta S_{\text{tot}} = 0$. Derfor må

$$\Delta S_{BC} = -\Delta S_{AB} = \underline{-0,821 \frac{\text{J}}{\text{K}}}.$$

* Hvis man utsetter beregning av ΔS_{BC} til etter T_C og V_C er beregnet, kan vi bruke fra formelark:

$$\Delta S_{BC} = nC_V \ln \frac{T_C}{T_B} + nR \ln \frac{V_C}{V_B} = 0,1625 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8,314 \text{ J/K} \cdot \ln \frac{217}{450} + 1,3507 \text{ J/K} \cdot \ln 1,6267 = -0,821 \text{ J/K}.$$

d. For adiabaten AC har vi

$$p_C V_C^\gamma = p_A V_A^\gamma \quad (1)$$

og for prosessen BC har vi

$$p_C V_C^{5/2} = p_B V_B^{5/2}. \quad (2)$$

Likn. (1) dividert med likn. (2) og det at $V_B = V_A$ gir

$$\frac{V_C^\gamma}{V_C^{5/2}} = \frac{p_A}{p_B} \cdot \frac{V_A^\gamma}{V_B^{5/2}} \Rightarrow V_C^{\gamma-5/2} = \frac{p_A}{p_B} \cdot V_A^{\gamma-5/2},$$

altså

$$V_C = V_A \cdot \left(\frac{p_A}{p_B} \right)^{\frac{1}{\gamma-5/2}} = V_A \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{-\frac{6}{5}} = V_A \cdot 1,6267 = 6,507 \text{ dm}^3 = \underline{6,51 \text{ dm}^3}.$$

Da er $\frac{V_A}{V_C} = \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{6}{5}}$ og fra likn. (1) får vi

$$p_C = p_A \left(\frac{V_A}{V_C} \right)^\gamma = p_A \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{6}{5} \cdot \gamma} = p_A \left(\frac{2}{3} \right)^2 = p_A \cdot 0,44444 = \underline{0,444 \text{ atm}}.$$

og

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{0,44444 \cdot 101,3 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot 6,507 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{1,3507 \text{ Nm/K}} = 216,89 \text{ K} = \underline{217 \text{ K}} \quad (-56^\circ \text{C}).$$

* eller

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{p_A \left(\frac{2}{3} \right)^2 V_A \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{-\frac{6}{5}}}{nR} = T_A \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{4}{5}} = T_A \cdot 0,72298 = \underline{217 \text{ K}}.$$

e. I BC der $pV^{5/2} = p_C V_C^{5/2} = p_B V_B^{5/2}$ får vi

$$\begin{aligned} W_{BC} &= \int_B^C p dV = \int_B^C p_B \left(\frac{V_B}{V} \right)^{5/2} dV = p_B V_B^{5/2} \left[-\frac{2}{3} V^{-3/2} \right]_B^C = p_B V_B^{5/2} \cdot \frac{2}{3} (V_B^{-3/2} - V_C^{-3/2}) \\ &= \frac{2}{3} p_B V_B - \frac{2}{3} p_C V_C = \frac{2}{3} nR (T_B - T_C) = \frac{2}{3} \cdot 1,3507 \text{ J/K} \cdot (450 - 216,89) \text{ K} = 209,91 \text{ J} = \underline{210 \text{ J}}. \end{aligned}$$

f. Virkningsgraden er definert

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{inn}}} = \frac{W_{BC} + W_{CA}}{Q_{AB}}.$$

I BC går varme ut. W_{BC} er funnet over. For adiabatene CA og isokoren AB finner vi

$$W_{CA} = -C_V (T_A - T_C) = -\frac{3}{2} \cdot nR (T_A - T_C) = -\frac{3}{2} \cdot 1,3507 \text{ J/K} \cdot (300 - 216,89) \text{ K} = -168,39 \text{ J}.$$

$$Q_{AB} = C_V \cdot (T_B - T_A) = \frac{3}{2} \cdot nR (T_B - T_A) = \frac{3}{2} \cdot 1,3507 \text{ J/K} \cdot (450 - 300) \text{ K} = 303,91 \text{ J}.$$

$$\eta = \frac{209,91 - 168,39}{303,91} = \frac{41,52}{303,91} = 0,1366 = 0,137.$$

* Med de foreslåtte 'reserveverdiene' er $W_{CA} = -\frac{3}{2} \cdot 1,3507 \text{ J/K} \cdot (300 - 210,0) \text{ K} = -182,4 \text{ J}$ og $\eta = \frac{216 - 182,4}{303,91} = \underline{0,111}$.

Oppgave 5.

Siden temperaturen på ytterflatene (T_v og T_h) er gitt, trenger vi ikke ta med varmeovergangen $\alpha \Delta T$ for disse flatene. Med $\kappa_a = 3\kappa_b$ og $a = 2b$ kan varmestrøm $j = \kappa \Delta T / \ell$ gjennom hvert lag uttrykkes:

$$\begin{aligned} j_A &= 3\kappa_b \cdot (T_v - T) / 2b \\ j_B &= \kappa_b \cdot (T - T_h) / b \end{aligned}$$

Ved stasjonære forhold (konstant T) er varmestrømmen den samme gjennom begge lag, $j_A = j_B$, og dette gir

$$(3/2) \cdot (T_v - T) = (T - T_h) \quad \Rightarrow \quad 3T_v - 3T = 2T - 2T_h \quad \Rightarrow \quad T = \frac{3}{5}T_v + \frac{2}{5}T_h = \underline{52^\circ\text{C}} \quad (325 \text{ K}).$$

Med kjennskap til elektriske kretser kan man trekke veksler på analogien til Ohms lov: $I = V/R$ med varmestrømtetthet j analog til strømmen I og drivkraft ΔT analogi til spenning V . Dette er seriekopling av to motstander med (termisk) resistans $R = R_A + R_B = a/\kappa_a + b/\kappa_b = 2b/3\kappa_b + b/\kappa_b = 5/3 \cdot b/\kappa_b$. Dermed er

$$j = \frac{\Delta T}{R} = \frac{3}{5} \frac{\kappa_b}{b} \Delta T \quad \Rightarrow \quad T = T_h + j \cdot R_B = T_h + \frac{3}{5} \frac{\kappa_b}{b} \Delta T \cdot \frac{b}{\kappa_b} = T_h + \frac{3}{5} \Delta T = \underline{52^\circ\text{C}}.$$