

Eksamen 11. des. 2014. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver

Oppgave:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Rett svar:	B	D	E	B	D	C	A	E	D	C	B
Oppgave:	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Rett svar:	A	A	C	D	C	B	E	C	B	B	A

Detaljer om spørsmålene:

1-1. B. Farten skifter retning på toppen slik at A ikke kan være rett. Akselerasjonen er konstant under bevegelsen opp (og ned), slik at D ikke er rett. Akselerasjonen har størst tallverdi når klossen er på vei oppover fordi da virker tyngden og friksjonen i samme retning, altså er B med størst endring i v på opptur riktig.

1-2. D. $F_f = \mu_k F_N = \mu_k (mg - F \sin \theta)$. Normalkrafta blir altså mindre som følge av at F har komponent oppover. Det gjelder også at $F_f = F \cos \theta$ når farta er konstant, men dette var ikke et oppgitt alternativ.

1-3. E. Ved fall uten luftmotstand er akselerasjonen konstant og lik g . Med luftmotstand avtar den gradvis til null, men dette tar i prinsipp uendelig lang tid, slik at akselerasjonen avtar asymptotisk mot null. Med bruk av Newton 2: $mg - bv^2 = ma$. Dvs. akselerasjonen avtar når v etterhvert øker og går mot null (lik null og konstant fart når luftmotstanden lik tyngden). Det er kvalitativt samme forløp dersom luftmotstanden prop. med v .

1-4. B. ω og $\alpha = \dot{\omega}$ er lik for alle punkter på plata. $a_c = \omega^2 r$ og $a_\theta = \alpha r$ øker begge med r =avstand fra sentrum.

1-5. D. Kollisjonen er fullstendig uelastisk, så (mekanisk) energi E for systemet kan ikke være bevart. Akslingen som står fast i bordet virker på systemet med en (ytte) kraft under støtet, dermed kan heller ikke systemets bevegelsesmengde p være bevart. Men denne krafta fra akslingen representerer ikke noe kraftmoment mhp. en aksel, slik at spinnet L er bevart.

1-6. C. $\vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g} = rmg \hat{x} \times (-\hat{z}) = rmg \hat{y}$.

1-7. A. Ifølge spinnsatsen $\vec{\tau} \cdot dt = d\vec{L}$ vil endring i spinnet $d\vec{L}$ ha samme retning som kraftmomentet $\vec{\tau}$. Kraftmomentet fra tyngdens er i retning $\hat{y}$: $\vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g} = rmg \hat{x} \times (-\hat{z}) = rmg \hat{y}$. Med hjulrotasjonsretning ω som angitt har $\vec{L}$ retning $\hat{x}$ og med endring $d\vec{L}$ i retning $\hat{y}$ vil presesjonen gå mot klokka sett ovenfra, dvs. $\vec{\Omega} \propto \hat{z}$.

1-8. E. Kinetisk energi alltid positiv, derfor kan A, C og D forkastes. Hastigheten endres harmonisk, derfor må E_{kin} også endres harmonisk, 5 er rett.

1-9. D. Fra figuren ser vi f.eks. at $x(0) = 1$ og $x(5T) = 0,5$, der $T = 2\pi/\omega$ er svingningens periode. Dermed:

$$e^{-\gamma \cdot 5T} = e^{-\gamma \cdot 5 \cdot 2\pi/\omega} = 0,5 \quad \Rightarrow \quad 10\pi \frac{\gamma}{\omega} = \ln 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma}{\omega} = \frac{\ln 2}{10\pi} = 0,0221.$$

1-10. C. Ved maksimum v er $\dot{v} = 0$, som skjer når $a = \dot{v} = 0$.

1-11. B. Klossen vil starte å gli når $mg \sin \theta > F_{f,\text{max}} = \mu_s F_N = 0,65 \cdot mg \cos \theta$, altså ved $\theta = \arctan 0,65 = 33^\circ$. Grensen for å tippe over er når massesenteret ligger rett over nedre kontaktpunkt (momentbalanse). For en kube (kvadratisk sidekant) skjer dette ved $\theta = 45^\circ$.

1-12. A. Med $a = 0,40 \text{ m} = \text{sidekant}$, F_x den horisontale krafta og G tyngden, gir rotasjonslikevekt om nedre feste: $G \cdot a/2 = F_x \cdot a$ som gir $F_x = G/2 = \frac{1}{2} \cdot 4,0 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 20 \text{ N}$.

1-13. A. 1. Hovedsetning: $Q = \Delta U + W$. Temp. øker likt $\Rightarrow \Delta U > 0$ og lik i begge. Konstant volum: $W = 0$. Volumet må øke når T skal øke med konstant trykk, dvs. $W > 0$, dermed Q_p størst.

1-14. C. Fra 2. hovedsetning. Arbeid kan 100% omformes til varme(D), ikke motsatt(C). Varme kan overføres fra kaldt til varmt legeme ved input av arbeid, en kjølemaskin(B). 2.H gjelder alle prosesser, også irreversible(E).

1-15. D. Koeksistens mellom fast stoff og væske ved 1, dvs. smelting. Koeksistens mellom gass og væske ved 2, dvs. fordampning. Koeksistens mellom fast stoff og gass ved 3, dvs. sublimasjon.

1-16. C. En isoterm fra tilstand a er brattere enn isobaren ab men slakere enn adiabaten ac. Dermed: $T_b > T_a > T_c$.

1-17. B. For ideell gass er T proporsjonal med $\langle E_k \rangle$, uavhengig av typen gass. (For toatomig gass blir noe av kin. energi rotasjonsenergi og translasjonsfarten blir mindre. Ingen vibrasjonsenergi ved romtemp.)

1-18. E. $\eta = W/Q_{\text{inn}} = (Q_{\text{inn}} - Q_{\text{ut}})/Q_{\text{inn}} = (12000 - 9000)/12000 = 1/4$.

1-19. C. Per frihetsgrad er $C_V = \frac{1}{2}R$. Tre translasjonsfrihetsgrader (x, y, z) for alle gassmolekyler. Ved romtemperatur vil toatomige gassmolekyler rotere med to frihetsgrader, dermed R større. Vibrasjon først ved temperatur langt over romtemperatur.

1-20. B. Ved adiabatisk kompresjon er pV^γ konstant slik at $p_1 = p_0 (V_0/V_1)^\gamma = p_0 \cdot 3^\gamma$. Gassene er ideelle og ved 0°C har enatomige He $\gamma = C_p/C_V = 5/3$ mens toatomige O_2 har $\gamma = C_p/C_V = 7/5 < 5/3$. Størst γ gir størst trykk, altså He størst trykk. Fra ideell gasslov $pV = nRT$ vil ved slutttilstanden gassen med høyest p også ha høyest T når sluttvolumene er de samme.

1-21. B. Utstråling: $\dot{Q} = Aj = Ae\sigma T^4 = 1,70 \text{ m}^2 \cdot 0,90 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \cdot (300 \text{ K})^4 = 702,68 \text{ W}$. Innstråling: $\dot{Q} = 1,70 \text{ m}^2 \cdot 0,90 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4} \cdot (290 \text{ K})^4 = 613,57 \text{ W}$. Netto: 89,11 W.

1-22. A. Seriekopling av varmemotstander er som seriekopling av elektriske motstander, $R = \sum R_i = R_1 + R_2$. Utregnet: Ved stasjonære forhold er varmestrømmen lik i begge stavene, $\dot{Q} = \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2$, der $\dot{Q}_i = \frac{\kappa_i A_i}{\ell_i} \Delta T_i = \frac{1}{R_i} \Delta T_i$ (formelsamling), altså $R_i \dot{Q} = \Delta T_i$. Sum av temperaturendring: $T_H - T_L = \Delta T_1 + \Delta T_2$ gir da $R\dot{Q} = R_1 \dot{Q} + R_2 \dot{Q}$, altså $R = R_1 + R_2$.

Oppgave 2. Mekanikk

a. Fra formelark har kula treghetsmoment $I = \frac{2}{5}mr^2$, som gir

$$E_k = E_{k,\text{trans}} + E_{k,\text{rot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2 \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{7}{10}mv^2}}.$$

b. Vi velger høyde $h = 0$ på underlaget. Ved A har kulas tyngdepunkt en høyde $h = r$, ved C er høyden $h = R$. Bevaring av energi gir:

$$mgr + \frac{7}{10}mv_A^2 = mgR + \frac{7}{10}mv_C^2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow v_C^2 = v_A^2 - gR' \cdot \frac{10}{7} = 9,0 \text{ m}^2/\text{s}^2 - 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,200 \text{ m} \cdot \frac{10}{7} = 6,197 \text{ m}^2/\text{s}^2, \quad (2)$$

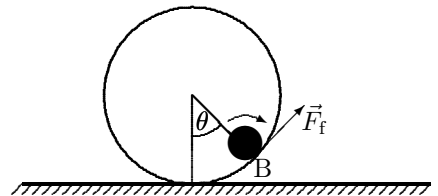
der vi har brukt $R' = R - r = 0,200 \text{ m}$.

$$v_C = \sqrt{6,197} \text{ m/s} = 2,489 \text{ m/s} = \underline{\underline{2,49 \text{ m/s}}}.$$

c. Vinkelhastigheten for kula avtar, og eneste krafta som gir vinkelakslerasjon er friksjonskrafta F_f . Derfor må F_f virke motsatt rotasjonsretningen, dvs. **oppover**, og parallelt med underlaget, som vist i figuren.

Med positiv omdreining i kulas rulleretning (med klokka) gir spinnsatsen

$$\sum \tau = I\alpha \Rightarrow -F_f r = I\alpha \quad \left(\Rightarrow F_f = -\frac{2}{5}mr\alpha \right). \quad (3)$$



d.

$$\text{N2 med pos oppover:} \quad ma = F_f - mg \sin \theta \quad (4)$$

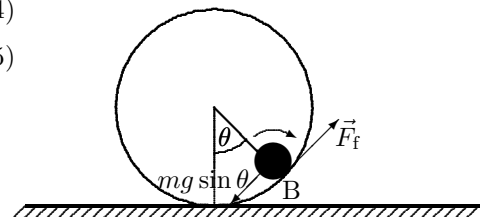
$$\text{N2-rot (3) med } \alpha = a/r: \quad I\alpha = I\frac{a}{r} = -F_f r \quad (5)$$

Likn. (3) eller (5) gir

$$F_f = -I\frac{a}{r^2} = -\frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{a}{r^2} = -\frac{2}{5}ma,$$

som innsatt i (4) gir

$$ma(1 + \frac{2}{5}) = -mg \sin \theta \Rightarrow \underline{\underline{a = -\frac{5}{7}g \sin \theta}}. \quad (6)$$



Mer utradisjonelt, kan også vises fra energibalanse:

$$E_{\text{tot}} = \frac{7}{10}mv^2 + mgh = \frac{7}{10}mv^2 + mgR'(1 - \cos \theta) = \text{konst.}$$

$$\text{Derivasjon } dE_{\text{tot}}/dt \text{ gir} \quad \frac{7}{10}m2v \frac{dv}{dt} + mgR' \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a = -\frac{5}{7}g \sin \theta.$$

Her har vi brukt $R' \frac{d\theta}{dt} = v$ slik at v forkortes bort.

e. I stilling C er $\theta = 90^\circ$, dvs. $a = -\frac{5}{7}g \sin \theta = -\frac{5}{7}g$. Da er vinkelakselerasjonen $\alpha = \frac{a}{r} = -\frac{5}{7}\frac{g}{r}$. Det er kun F_f som gir α , og skal kula rulle (uten å slure) er nødvendig friksjonskraft gitt ved likn. (5):

$$F_f = -I \frac{\alpha}{r} = -\left(\frac{2}{5}mr^2\right) \cdot \left(-\frac{5}{7}\frac{g}{r^2}\right) = \frac{2}{7}mg = \frac{2}{7} \cdot 0,150 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = \underline{0,420 \text{ N}}.$$

Kan også finnes fra likn. (4): $F_f = ma + mg \sin \theta \stackrel{(6)}{=} -\frac{5}{7}mg \sin \theta + mg \sin \theta = \frac{2}{7}mg \sin \theta$.

f. Maksimal friksjonskraft er

$$F_{f,\max} = \mu_s \cdot F_N,$$

så vi må finne hva normalkrafta er mot underlaget ved C. Newton 2 horisontalt:

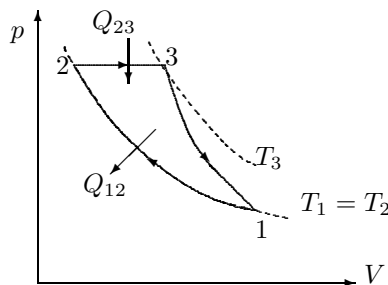
$$\sum F = ma_c \Rightarrow F_N = m \frac{v_C^2}{R} = 0,150 \text{ kg} \cdot \frac{6,197 \text{ m}^2/\text{s}^2}{0,200 \text{ m}} = 4,65 \text{ N}.$$

Dermed er

$$F_{f,\max} = \mu_s \cdot F_N = 0,200 \cdot 4,65 \text{ N} = 0,930 \text{ N}.$$

Nødvendig friksjonskraft $F_f = 0,42 \text{ N}$ er godt under det maksimale: kula ruller fortsatt trygt uten fare for å slure. (Sagt på annen måte: Nødvendig friksjonskoeffisient er $F_f/F_N = 0,42/4,65 = 0,090$, og den oppgitte er større.)

Oppgave 3. Kretsprosess.



a. Prosessene skissert i figuren, ikke perfekt krumning på kurvene.

1-2. Isoterm med helning $p \propto V^{-1}$.

2-3. Isobar ekspansjon. Konstant p , tilførsel av varme til høyere volum V_3 og høyere temperatur T_3 .

3-1. Adiabat med helning $p \propto V^{-\gamma}$, brattere enn isoterm ($\gamma = 7/5 = 1,4$ for toatomig gass).

Varme $Q_{23} > 0$ inn i gassen ved 2-3, varme $Q_{12} > 0$ trekkes ut av gassen ved 1-2, $Q_{31} = 0$ ved adiabaten.

To isotermer: $T_1 = T_2$ og T_3 er inntegnet.

b. Idealgass, isoterm prosess: $p_1 V_1 = nRT_1 = p_2 V_2$.

$\Delta U = 0 \text{ J}$, fordi U kun avhengig T for ideell gass, og her er T konstant,

$\Delta S = \int_1^2 dQ_{\text{rev}}/T_1$. 1.hovedsetning med $\Delta U = 0$ gir

$$dQ_{\text{rev}} = dW = pdV = (nRT_1/V) \cdot dV, \text{ slik at: } \underline{\Delta S = \frac{1}{T_1} \cdot nRT_1 \int_1^2 dV/V = nR \ln V_2/V_1}.$$

Eller direkte fra formelark: $\Delta S_{12} = nC_V \ln T_2/T_1 + nR \ln V_2/V_1 = 0 + nR \ln V_2/V_1$.

c. Beregning av V_3 må baseres på skjæringen mellom isobaren 2-3 (med $p_2 = p_3$) og adiabaten 3-1 (med $pV^\gamma = \text{konstant}$). Fra isotermer i **b.** er $p_2/p_1 = V_1/V_2$, og dette gir

$$p_2 V_3^\gamma = p_1 V_1^\gamma \Rightarrow V_3 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\gamma} = \underline{V_1 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1/\gamma}}.$$

Tilhørende T_3 bestemt fra ideell gasslov $nRT_3 = p_2 V_3$, der vi igjen utnytter $p_1 V_1 = nRT_1 = p_2 V_2$ fra isotermer 1-2.

$$T_3 = \frac{p_2 V_3}{nR} = \frac{p_2 V_2}{nR} \frac{V_3}{V_2} = T_1 \frac{V_1}{V_2} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1/\gamma} = \underline{T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-1/\gamma}}$$

For toatomig gass er $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7/2}{5/2} = \frac{7}{5}$ og $1 - \frac{1}{\gamma} = \frac{2}{7}$, men verdi ikke nødvendig å beregne eller å sette inn.

Kunne alternativt finne T_3 fra adiabatlikningen $T_3 V_3^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$, tar med som kontroll:

$$T_3 = T_1 \left[\frac{V_1}{V_3}\right]^{\gamma-1} = T_1 \left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1/\gamma}\right]^{\gamma-1} = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \underline{T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-1/\gamma}}$$

der vi har brukt uttrykket for V_3/V_1 ovenfor.

d. 1-2 er en isoterm prosess der vi f.eks. kan utnytte uttrykket for ΔS_{12} fra **a.** Dette gir

$$Q_{12} = T_1 \Delta S_{12} = nRT_1 \ln V_2/V_1.$$

For den isobare prosessen har vi ganske enkelt

$$Q_{23} = n C_p \cdot (T_3 - T_1),$$

slik at netto varme er

$$Q = Q_{12} + Q_{23} = \underline{nRT_1 \ln V_2/V_1 + n C_p \cdot (T_3 - T_1)}.$$

Dette er vel enkleste formen å uttrykke svaret med oppgitte størrelser inklusiv T_3 .

For isotermer kunne vi alternativt brukt $\Delta U = 0 \Rightarrow Q_{12} = W_{12} = \int_1^2 p dV = nRT_1 \int_1^2 \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln V_2/V_1$.

e. For adiabatene 3-1 er det enklere å regne ut ΔU og så bruke 1. lov med $Q = 0$, som gir $W = -\Delta U$. For ideell gass er indre energi kun avhengig av temperaturen og lik $U(T) = nC_V T$, slik at vi får

$$W_{31} = -(U_1 - U_3) = -nC_V(T_1 - T_3) = \underline{nC_V(T_3 - T_1)}.$$

Sjekk gjerne at $W_{31} > 0$, som den skal være for en ekspansjon.

Med mer strev kan arbeidet beregnes ved vanlig integrasjon av $p dV$. For adiabatene 3-1 er $pV^\gamma = p_1 V_1^\gamma = p_3 V_3^\gamma$, slik at

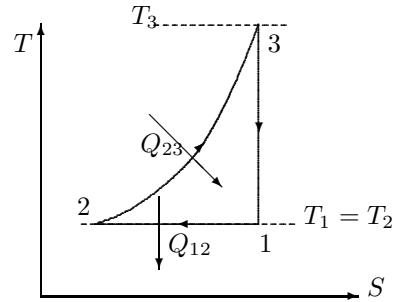
$$\begin{aligned} W_{31} &= \int_3^1 p dV = p_1 V_1^\gamma \cdot \int_3^1 V^{-\gamma} dV = p_1 V_1^\gamma \cdot \frac{1}{1-\gamma} [V_1^{1-\gamma} - V_3^{1-\gamma}] \\ &= \frac{1}{1-\gamma} [p_1 V_1^\gamma \cdot V_1^{1-\gamma} - p_3 V_3^\gamma \cdot V_3^{1-\gamma}] = \frac{1}{1-\gamma} [p_1 V_1 - p_3 V_3] = \frac{1}{\gamma-1} [nRT_3 - nRT_1] \\ &= \underline{\frac{nR}{\gamma-1} [T_3 - T_1] = nC_V [T_3 - T_1]}. \end{aligned}$$

I siste overgang har vi brukt $\frac{R}{\gamma-1} = \frac{RC_V}{C_p-C_V} = \frac{RC_V}{R} = C_V$ som framkommer fra $\gamma = C_p/C_V$ og $C_p - C_V = R$.

f. I TS -diagram er isotherm en horisontal linje og adiabat (isentrop) er en vertikal linje. Isobaren forbinder 2 og 3 og vil ha krumning som vist. Funksjonsforløpet for isobaren kan vi kun finne ut ved beregning, som spurt etter:

For prosess 2-3 gjelder: $dQ = T dS$ og $dQ = n C_p dT$ og altså $dS = n C_p \frac{dT}{T}$. Gir integrert:

$$\begin{aligned} \int_{S_2}^S dS &= n C_p \int_{T_1}^T \frac{dT}{T} \Rightarrow S - S_2 = n C_p \ln \frac{T}{T_1} \\ \Rightarrow T(S) &= T_1 \cdot \exp \left\{ \frac{S - S_2}{n C_p} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$



Alternativt fra formelark for ΔS_{12} som gir $\Delta S_{23} = nC_V \ln T_3/T_2 + nR \ln V_3/V_2$. For isobaren 23 er $V/V_2 = T/T_2$, slik at $S - S_2 = S(T) - S(T_2) = n(C_V + R) \ln T/T_2 = nC_p \ln T/T_2$. Med $T_2 = T_1$ får vi også her $T(S) = T_1 \cdot \exp \left\{ \frac{S - S_2}{n C_p} \right\}$.

Kommentar: Krumningen for isobaren kan kontrolleres uten utregning av $T(S)$ med $\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p = 1/\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \frac{T}{nC_p}$ som vi får fra $S(T, p) = S_0 + nC_p \ln \frac{T}{T_0} - nR \ln \frac{p}{p_0}$ for ideell gass. Stigningstallet $\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p$ er altså positivt og øker med temperaturen.

Vi kan evt. kontrollere funnet uttrykk for T_3 i **c.** mot likn. (7):

Nå er $S_3 = S_1$ slik at likn. (7) gir $T_3 = T(S_1) = T_1 \cdot \exp \left\{ \frac{S_1 - S_2}{n C_p} \right\}$. Fra **a.** har vi $S_1 - S_2 = -\Delta S = nR \ln V_1/V_2$. Bruk av $\frac{R}{C_p} = \frac{C_p - C_V}{C_p} = 1 - \frac{1}{\gamma}$ gir samme svaret for T_3 som i **c.** :

$$T_3 = T_1 \cdot \exp \left\{ \frac{nR \ln \frac{V_1}{V_2}}{n C_p} \right\} = T_1 \cdot \exp \left\{ \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \ln \frac{V_1}{V_2} \right\} = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma}}.$$