

Eksamen 12. aug. 2015. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver

Oppgave:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Rett svar:	E	D	A	C	A	C	A	B	A	B	A	D	C

Detaljer om spørsmålene:

1-1. E. Normalkraft normalt opp fra underlaget, friksjonskraft på langs oppover underlaget, tyngdekrafta rett nedover.

1-2. D. Hastighet endrer retning, dermed også (sentrypetal)akselerasjon mot sentrum. Sum av krefter må virke mot sentrum og dermed $\vec{F} \perp \vec{v}$ og ingen arbeid gjøres.

1-3. A. Landingen på karusellen er et uelastisk støt, så (mekanisk) energi E for systemet kan ikke være bevart. Akslingen som står fast i bakken, virker på systemet med en kraft når studenten lander. Dermed kan heller ikke systemets bevegelsesmengde p være bevart. Men denne kraften fra akslingen representerer ikke noe kraftmoment mhp. en akse gjennom karusellens sentrum, slik at spinnet L er bevart.

1-4. C. Når kulene henger sammen er dette et fullstendig uelastisk støt, og det vil tapes energi. Under en kollisjon uten ytre krefter er alltid p og L bevart (her er sammenhengen $L = \ell p$ for hver av kulene, der ℓ er snorlengden).

1-5. A. Bruk Steiners sats: $I = I_{\text{cm}} + Mh^2$.

1-6. C. $T_3 = T_2 \cdot \sin 60^\circ$, $T_1 = T_2 \cos 60^\circ$. Da $\sin 60^\circ > \cos 60^\circ$ er $T_3 > T_1$. Videre må T_2 være størst, f.eks. fra Pythagoras: $T_2^2 = T_1^2 + T_3^2$.

1-7. A. Langs skråplanet virker tyngdens komponent ($mg \sin \theta$, der θ er helningen på skråplanet) nedover, like stor for alle tre, samt friksjonskrafta f_i ($i = 1, 2, 3$) fra underlaget, retta oppover. Nettokrafta $mg \sin \theta - f_i$ bestemmer tyngdepunktets akselerasjon, som tydeligvis har vært størst for legeme 3, og like stor for 1 og 2. Ergo er f_3 mindre enn $f_1 = f_2$.

1-8. B. Ved adiabatisk ekspansjon faller temperaturen fordi $\Delta U = W < 0$. Areal under pV -kurve og dermed arbeidet er mindre enn for isoterm, uansett temperatur og V_2/V_1 .

1-9. A. Ekvipartisjonsprinsippet sier at energien fordeles med $\frac{1}{2}k_B T$ per frihetsgrad per molekyl, uansett masse. Per atom blir det derfor like mye (indre) energi U for de to enatomige gassene siden begge har tre frihetsgrader.

1-10. B. Produktet pV er uendret hvis trykket doubles og volumet halveres. Da er også temperaturen uendret, som igjen betyr at v_{rms} er uendret.

1-11. A. 1.hovedsetning: $\Delta U = Q - W > 0$ og lik for alle. Arbeid W er lik areal under prosesskurva og positiv for alle, derfor må $Q = \Delta U + W > 0$ og størst for prosessen med størst W . Arbeid er lik areal under prosesskurva, størst for prosess 1.

1-12. D. En Carnot-prosess består av to isotermer og to isentropiske prosesser, dvs. med hhv. T konstant og S konstant. Dermed et rektangel i et (S, T) -diagram.

1-13. C. Parallellkopling av varmemotstander er som parallellkopling av elektriske motstander, $\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$ eller $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Utregnet: I hver stav: $\dot{Q}_i = \frac{\kappa_i A_i}{\ell} \Delta T = \frac{\Delta T}{R_i}$ (formelsamling). Temperaturfallet $\Delta T = T_H - T_L$ er det samme i begge stavene. Total varmestrom $\dot{Q} = \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2$ gir derfor $\frac{\Delta T}{R} = \frac{\Delta T}{R_1} + \frac{\Delta T}{R_2}$, altså $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

Oppgave 2. Rulling i loop

a. Vi velger høyde $h = 0$ på underlaget. Når kula ruller på underlaget har kulas massesenter en høyde $h_A = r$, i toppunktet C har massesenteret høyden $h_C = 2R - r$. Høydeforskjellen er $\Delta h = h_C - h_A = 2R - 2r = 2R'$. Bevaring av energi gir:

$$\begin{aligned} \frac{7}{10}mv_0^2 &= mg2R' + \frac{7}{10}mv_C^2 \\ \Rightarrow v_C^2 &= v_0^2 - 2gR' \cdot \frac{10}{7} = 9,0 \text{ m}^2/\text{s}^2 - 2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,200 \text{ m} \cdot \frac{10}{7} = 3,394 \text{ m}^2/\text{s}^2, \end{aligned}$$

der vi har brukt $R' = R - r = 0,200 \text{ m}$.

$$v_C = \sqrt{3,394} \text{ m/s} = 1,842 \text{ m/s} = \underline{1,84 \text{ m/s}}.$$

b. Dersom nødvendig sentripetalakselerasjon a_c ved C er større enn tyngdens akselerasjon, må det i tillegg til tyngdekrafta mg være en normalkraft F_N fra underlaget. Vi beregner a_c ved C:

$$a_c = v_C^2/R' = 3,394/0,200 \text{ m/s}^2 = 16,97 \text{ m/s}^2 > 9,81 \text{ m/s}^2,$$

det er derfor en normalkraft og kula har kontakt med underlaget.

Vi kan alternativt beregne verdi for nødvendig normalkraft F_N ut fra Newton 2. Både mg og F_N virker rett nedover.

$$ma_c = mv_C^2/R' = mg + F_N$$

$$\Rightarrow F_N = mv_C^2/R' - mg = 0,150 \text{ kg} \cdot 3,394 \text{ m}^2/\text{s}^2/0,200 \text{ m} - 0,150 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 2,545 \text{ N} - 1,472 \text{ N} = 1,07 \text{ N}$$

En positiv normalkraft F_N viser at det er kontakt med underlaget. Kulas masse m har ingen betydning.

c. Som i b. bruker vi Newton 2, men nå er det bare andelen $mg \sin \theta$ av tyngdekraften som bidrar til sentripetalkrafta:

$$mv_B^2/R' = mg \sin \theta + F_N.$$

Kula mister kontakten med underlaget idet $F_N = 0$, dvs.

$$\sin \theta = v_B^2/gR'. \quad (1)$$

Farten v_B er gitt av energibevaring som i a. Ved B er kulas høyde $R' + R' \sin \theta = R'(1 + \sin \theta)$.

$$\frac{7}{10}mv_0^2 = mgR'(1 + \sin \theta) + \frac{7}{10}mv_B^2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow v_B^2 = v_0^2 - (1 + \sin \theta)gR' \cdot \frac{10}{7}. \quad (3)$$

Innsatt i likn. (1):

$$\sin \theta = v_0^2/gR' - (1 + \sin \theta) \cdot \frac{10}{7}$$

$$\sin \theta = \left(v_0^2/gR' - \frac{10}{7} \right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{10}{7}} = \left(\frac{(2,5)^2}{9,81 \cdot 0,20} - \frac{10}{7} \right) \cdot \frac{7}{17} = 0,723$$

$$\theta = \underline{46,3^\circ}.$$

Oppgave 3. Svingning og friksjon

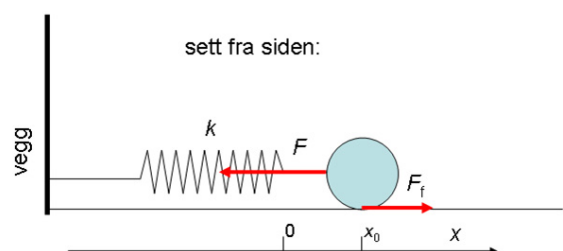
a. Fjærkrafta $F = -kx$ er positiv mot høyre (negativ for positiv x). Fjærkrafta gir en akselerasjon $a = \ddot{x}$. Newton 2 på akslingen med kuler (masse $2 \cdot M/2 = M$):

$$\sum F = M\ddot{x} = -kx, \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{M}x = 0,$$

som vi gjenkjenner som en harmonisk oscillasjon med $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ og svingetid

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1,00 \text{ kg}}{200 \text{ kg/s}^2}} = \underline{0,44 \text{ s}}.$$

b. Fjærkrafta virker mot venstre og for at kula skal roterakselerere fra å være i ro til å rotere mot klokka, må friksjonskrafta F_f ha retning mot høyre. F_f virker i kontaktpunktet mot underlaget. F må være større enn F_f for at kula skal få translasjonsakselerasjon mot venstre.



c. I høyre ytterstilling er farten i ferd med å endre seg fra positiv (høyre) til negativ (venstre), akselerasjonen må derfor ha retning mot venstre. Med positiv retning mot høyre blir da akselerasjonen $-a$, og Newton 2 gir, med

fjærkraft $F = -kx_0$ (mot venstre) og $F_f = +\frac{2}{5}Ma$ (mot høyre):

$$\sum F = F + F_f = -kx_0 + \frac{2}{5}Ma = -Ma \Rightarrow a = \frac{5}{7} \cdot \frac{kx_0}{M} = \frac{5}{7} \cdot \frac{200 \text{ N/m} \cdot 0,100 \text{ m}}{1,00 \text{ kg}} = \underline{14,3 \text{ m/s}^2}.$$

d. Skal rotasjonsakselerasjonen følge med lineær akselerasjon må (fra oppgitt F_f):

$$F_f = \frac{2}{5}Ma = \frac{2}{5} \cdot 1,00 \text{ kg} \cdot 14,3 \text{ m/s}^2 = 5,72 \text{ N}$$

Og med grensetilfellet $F_f = F_{f,\max} = \mu_s Mg$ får vi

$$\mu_s Mg = \frac{2}{5}Ma \Rightarrow \mu_s = \frac{a}{g} \cdot \frac{2}{5} = \frac{14,3}{9,81} \cdot \frac{2}{5} = \underline{0,58}.$$

Eller regning med symboler lengst mulig:

$$\mu_s Mg = \frac{2}{5}Ma_{\max} = \frac{2}{5}M \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{kx_0}{M} \Rightarrow \mu_s = \frac{2}{7g} x_0 \cdot \frac{k}{M} = \frac{2}{7 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} \cdot 0,10 \text{ m} \cdot \frac{200 \text{ N/m}}{1,00 \text{ kg}} = \underline{0,58}.$$

Kontroll: I høyre ytterstilling er fjærkraft $= kx_0 = 200 \text{ N/m} \cdot 0,10 \text{ m} = 20 \text{ N}$ mot venstre mens friksjonskraft (funnet over)

$F_f = 5,72 \text{ N}$ mot høyre. Dette gir lineær akselerasjon $|a| = \frac{\sum F}{M} = \frac{kx_0 - F_f}{M} = \frac{14,3 \text{ N}}{1,00 \text{ kg}} = 14,3 \text{ m/s}^2$, som stemmer.

Oppgave 4. Termodynamikk

a.

$$\underline{n} = \frac{p_A V_A}{RT_A} = \frac{101,3 \text{ kPa} \cdot 4,0 \text{ dm}^3}{8,314 \cdot 300 \text{ J/mol}} = 0,16246 \text{ mol} = \underline{0,163 \text{ mol}}$$

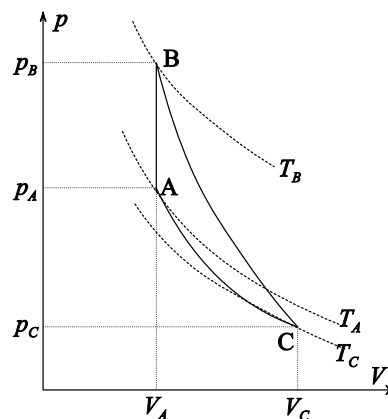
Vi får i videre regning ofte bruk for $nR = 1,3507 \text{ J/K}$.

b. Isoterm: $pV = nRT = \text{konst.} \Rightarrow p \propto V^{-1}$

Adiabater: $pV^\gamma = \text{konst.} \Rightarrow p \propto V^{-\gamma} = V^{-5/3} = V^{-1,667}$

Prosessen $pV^{5/2} = \text{konstant} \Rightarrow p \propto V^{-5/2} = V^{-2,5}$

Isoterm har altså slakest prosesskurve mens BC-prosessen med $pV^{5/2} = \text{konstant}$ har brattest prosesskurve og med adiabaten midt imellom. Dette er brukt ved inntegning av prosessene i pV -diagrammet. Dette gir også at $T_C < T_A < T_B$, som er brukt ved inntegning av isoterm.



c. Fra formelark:

$$\Delta S_{AB} = nC_V \ln \frac{T_B}{T_A} = \frac{3}{2} \cdot nR \cdot \ln \frac{T_B}{T_A} = \frac{3}{2} \cdot 1,3507 \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot \ln \frac{450}{300} = \underline{0,821 \frac{\text{J}}{\text{K}}}.$$

eller fra definisjon:

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{nC_V dT}{T} = nC_V \cdot \ln \frac{T_B}{T_A}$$

For den reversible, adiabatisk prosess CA er entropiendring null, idet $dQ_{\text{rev}} = 0$, $\underline{\Delta S_{CA} = 0}$.

Fordi S er en tilstandsfunksjon er for den sykliske, reversible prosessen $\underline{\Delta S_{\text{tot}} = 0}$.

d. For adiabaten AC har vi

$$p_C V_C^\gamma = p_A V_A^\gamma \quad (4)$$

og for prosessen BC har vi

$$p_C V_C^{5/2} = p_B V_B^{5/2}. \quad (5)$$

Likn. (4) dividert med likn. (5) og det at $V_B = V_A$ gir

$$\frac{V_C^\gamma}{V_C^{5/2}} = \frac{p_A}{p_B} \cdot \frac{V_A^\gamma}{V_B^{5/2}} \Rightarrow V_C^{\gamma-5/2} = \frac{p_A}{p_B} \cdot V_A^{\gamma-5/2},$$

altså

$$V_C = V_A \cdot \left(\frac{p_A}{p_B} \right)^{\frac{1}{\gamma-5/2}} = V_A \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{-\frac{6}{5}} = V_A \cdot 1,6267 = 6,507 \text{ dm}^3 = \underline{6,51 \text{ dm}^3}.$$

Da er $\frac{V_A}{V_C} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{6}{5}}$ og fra likn. (4) får vi

$$p_C = p_A \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^\gamma = p_A \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{6}{5} \cdot \gamma} = p_A \left(\frac{2}{3}\right)^2 = p_A \cdot 0,44444 = \underline{0,444 \text{ atm.}}$$

og

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{0,44444 \cdot 101,3 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot 6,507 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{1,3507 \text{ Nm/K}} = 216,89 \text{ K} = \underline{217 \text{ K}} \quad (-56^\circ \text{C}).$$

* eller

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{p_A \left(\frac{2}{3}\right)^2 V_A \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{6}{5}}}{nR} = T_A \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{5}} = T_A \cdot 0,72298 = \underline{217 \text{ K}}.$$

e. I BC der $pV^{5/2} = p_C V_C^{5/2} = p_B V_B^{5/2}$ får vi

$$\begin{aligned} W_{BC} &= \int_B^C p dV = \int_B^C p_B \left(\frac{V_B}{V}\right)^{5/2} dV = p_B V_B^{5/2} \left[-\frac{2}{3} V^{-3/2}\right]_B^C = p_B V_B^{5/2} \cdot \frac{2}{3} (V_B^{-3/2} - V_C^{-3/2}) \\ &= \frac{2}{3} p_B V_B - \frac{2}{3} p_C V_C = \frac{2}{3} nR (T_B - T_C) = \frac{2}{3} \cdot 1,3507 \text{ J/K} \cdot (450 - 216,89) \text{ K} = 209,91 \text{ J} = \underline{210 \text{ J}}. \end{aligned}$$

f. Virkningsgraden er definert

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{inn}}} = \frac{W_{BC} + W_{CA}}{Q_{AB}}.$$

I BC går varme ut. W_{BC} er funnet over. Oppgitt: $W_{CA} = -168,4 \text{ J}$. For isokoren AB finner vi

$$Q_{AB} = C_V \cdot (T_B - T_A) = \frac{3}{2} \cdot nR (T_B - T_A) = \frac{3}{2} \cdot 1,3507 \text{ J/K} \cdot (450 - 300) \text{ K} = 303,91 \text{ J}.$$

$$\eta = \frac{209,91 - 168,4}{303,91} = \frac{41,51}{303,91} = 0,1366 = \underline{0,137}.$$

* Med den foreslåtte 'reserveverdien' er $\eta = \frac{216,0 - 168,4}{303,91} = \underline{0,157}$.