

Eksamen 20. aug. 2016. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver

Oppgave:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rett svar:	E	C	D	A	C	B	A	C	A	B
Oppgave:	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Rett svar:	A	B	A	B	A	B	D	A	A	C

Detaljer om spørsmålene:

1-1. E. Normalkraft normalt opp fra underlaget, friksjonskraft på langs oppover underlaget, tyngdekrafta rett nedover. (Ved konst. fart er tyngdens komponent nedover skråplanet lik friksjonskrafta.)

1-2. C. En massiv sylinder har $I = \frac{1}{2}mR^2$. Kin.energi er $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mR^2(v/R)^2 = \frac{3}{4}mv^2$.

1-3. D. Hastighet endrer retning, dermed også (sentripetal)akselerasjon mot sentrum. Sum av krefter må virke mot sentrum og dermed $\vec{F} \perp \vec{v}$ og ingen arbeid gjøres.

1-4. A. Landingen på karusellen er et uelastisk støt, så (mekanisk) energi E for systemet kan ikke være bevart. Akslingen som står fast i bakken, virker på systemet med en kraft når studenten lander. Dermed kan heller ikke systemets bevegelsesmengde p være bevart. Men denne kraften fra akslingen representerer ikke noe kraftmoment mhp. en akse gjennom karusellens sentrum, slik at spinnet L er bevart.

1-5. C. Når kulene henger sammen er dette et fullstendig uelastisk støt, og det vil tapes energi. Under en kollisjon uten ytre krefter er alltid p og L bevart (her er sammenhengen $L = \ell p$ for hver av kulene, der ℓ er snorlengden).

1-6. B. Fart til venstre kule før støt fra energibevarelse $mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1^2 = 2gh$. Med $v' =$ fellesfarten etter støtet gir bevaring av bevegelsesmengden: $mv_1 = 2mv'$. Energibevaring etter støtet gir: $2mgH = \frac{1}{2}(2m)v'^2$, som gir $H = \frac{1}{2}\frac{v'^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{4g} = \frac{1}{2}\frac{2gh}{4g} = \frac{h}{4}$.

1-7. A. Bruk Steiners sats: $I = I_{\text{cm}} + Mh^2$.

1-8. C. $T_3 = T_2 \cdot \sin 60^\circ$, $T_1 = T_2 \cos 60^\circ$. Da $\sin 60^\circ > \cos 60^\circ$ er $T_3 > T_1$. Videre må T_2 være størst, f.eks. fra Pythagoras: $T_2^2 = T_1^2 + T_3^2$.

1-9. A. Langs skråplanet virker tyngdens komponent ($mg \sin \theta$, der θ er helningen på skråplanet) nedover, like stor for alle tre, samt friksjonskrafta f_i ($i = 1, 2, 3$) fra underlaget, retta oppover. Nettokrafta $mg \sin \theta - f_i$ bestemmer tyngdepunktets akselerasjon, som tydeligvis har vært størst for legeme 3, og like stor for 1 og 2. Ergo er f_3 mindre enn $f_1 = f_2$.

1-10. B. Arbeid $W =$ varme inn - varme ut. Effektivitet $e = \frac{W}{Q_{\text{inn}}} = \frac{Q_{\text{inn}} - Q_{\text{ut}}}{Q_{\text{inn}}} = \frac{64 - 42}{64} = 0,34$.

1-11. A. Størrelser som er tilstandsvariable er uavhengige av vegen i prosesser. Arbeid og varme er ikke tilstandsvariable.

1-12. B. Ved adiabatisk ekspansjon faller temperaturen fordi $\Delta U = W < 0$. Areal under pV -kurve og dermed arbeidet er mindre enn for isoterm, uansett temperatur og V_2/V_1 .

1-13. A. Ekvipartisjonsprinsippet sier at energien fordeles med $\frac{1}{2}k_B T$ per frihetsgrad per molekyl, uansett masse. Per atom blir det derfor like mye (indre) energi U for de to enatomige gassene siden begge har tre frihetsgrader.

1-14. B. Produktet pV er uendret hvis trykket dobles og volumet halveres. Da er også temperaturen uendret, som igjen betyr at v_{rms} er uendret.

1-15. A. 1.hovedsetning: $\Delta U = Q - W > 0$ og lik for alle. Arbeid W er lik areal under prosesskurva og positiv for alle, derfor må $Q = \Delta U + W > 0$ og størst for prosessen med størst W . Arbeid er lik areal under prosesskurva, størst for prosess 1.

1-16. B. Carnotvarmepumpa har effektfaktor $\eta = \left| \frac{Q_H}{W} \right| = \frac{T_H}{T_H - T_L} = \frac{308}{40} = 7,70$. Arbeid $W = \frac{Q_H}{7,70} = 0,195$ kJ.

1-17. D. En Carnot-prosess består av to isotermer og to isentropiske prosesser, dvs. med hhv. T konstant og S konstant. Dermed et rektangel i et (S, T) -diagram.

1-18. A. Temp.økning fra $T = (227 + 273) \text{ K} = 500 \text{ K}$ til $T' = 700 \text{ K}$ gir $\frac{P'}{P} = \frac{\sigma T'^4 - \sigma T_{\text{omg}}^4}{\sigma T^4 - \sigma T_{\text{omg}}^4} = \frac{700^4 - 273^4}{500^4 - 273^4} = 4,1$.

1-19. A. Seriekopling av varmemotstander er som seriekopling av elektriske motstander, $R = \sum R_i = R_1 + R_2$. Utregnet: Ved stasjonære forhold er varmestrømmen lik i begge stavnene, $\dot{Q} = \dot{Q}_1 = \dot{Q}_2$, der $\dot{Q}_i = \frac{\kappa_i A_i}{\ell_i} \Delta T_i = \frac{1}{R_i} \Delta T_i$ (formelsamling), altså $R_i \dot{Q} = \Delta T_i$. Sum av temperaturendring: $T_H - T_L = \Delta T_1 + \Delta T_2$ gir da $R_{\text{eff}} \dot{Q} = R_1 \dot{Q} + R_2 \dot{Q}$, altså $R = R_1 + R_2$.

1-20. C. Varmestrømmen avtar omvendt proporsjonal med tykkelsen ℓ : $\dot{Q} = A j = \kappa \Delta T A / \ell$

Oppgave 2.

a. I tillegg til kreftene tegnet på figuren i oppgaven virker tyngdekrafta Mg rett nedover midt på stanga. Likevekt i x - og y -retning gir

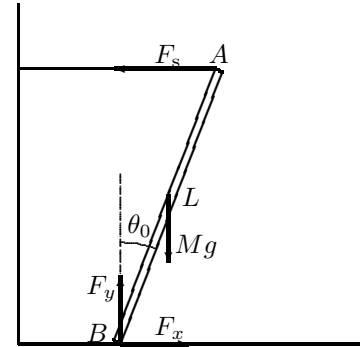
$$F_y = Mg \quad \text{og} \quad F_x = F_s$$

Videre har vi rotasjonslikevekt om punktet B:

$$Mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin \theta_0 = F_s \cdot L \cos \theta_0 \quad \Rightarrow \quad F_s = Mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \tan \theta_0.$$

Da har vi bestemt F_s , og ergo blir

$$F_x = F_s = Mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \tan \theta_0 \quad \text{og} \quad F_y = Mg.$$



b. Fordi F_x utgjøres kun av friksjonen, må $F_x = \mu_s F_N = \mu_s F_y = \mu_s Mg$. Sammen med uttrykket for F_x over får vi da

$$\mu_s Mg = Mg \cdot \frac{1}{2} \cdot \tan \theta_0 \quad \Rightarrow \quad \mu_s = \frac{\tan \theta_0}{2} = \frac{\tan 30^\circ}{2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} = 0,289.$$

Dette er minste verdien μ_s kan ha for at stanga ikke skal skli.

c. Vi bruker Steiners sats (parallellakse-teoremet) til å finne I om endepunktet, som er i avstand $\frac{L}{2}$ fra tyngdepunktet:

$$I_B = I_{\text{cm}} + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} ML^2 + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}.$$

Kan også integrere, med $dm = d\ell \cdot M/L$:

$$I_B = \int_0^L \ell^2 d\ell \cdot M/L = \frac{M}{L} \cdot \left[\frac{1}{3} \ell^3 \right]_0^L = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}.$$

d. Newtons 2. lov for rotasjon:

$$\tau = I_B \alpha \quad \Rightarrow \quad Mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin \theta = \frac{1}{3} ML^2 \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \underline{\underline{\frac{g}{L} \cdot \frac{3}{2} \sin \theta}}.$$

(Eventuelt med I_B : $\alpha = \frac{MgL/2}{I_B} \cdot \sin \theta$.)

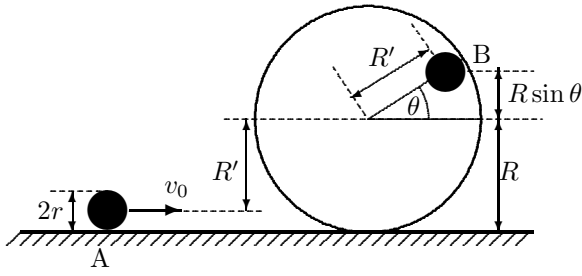
e. Bevegelsen kan sees på som rein rotasjon om B, slik at kin. energi er kun rotasjonsenergi $\frac{1}{2} I_B \omega^2 = \frac{1}{6} ML^2 \omega^2$. Energi ved θ_0 lik energi ved vilkårlig θ :

$$0 + Mg \frac{L}{2} \cos \theta_0 = \frac{1}{6} ML^2 \omega^2 + Mg \frac{L}{2} \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \omega = \underline{\underline{\sqrt{\frac{3g}{L} (\cos \theta_0 - \cos \theta)}}}.$$

(Eventuelt med I_B : $\omega^2 = \frac{MgL}{I_B} \cdot (\cos \theta_0 - \cos \theta)$.)

Man vil kunne verifisere ved derivasjon at $\dot{\omega} = \alpha$.

Oppgave 3. Loop



a. Det er gunstig å velge høyde $h = 0$ i kulas massesenter når den ruller på underlaget. I punktet B har da massesenteret høyde $h_B = R' + R' \sin \theta = R'(1 + \sin \theta)$. Vi kan fra bevaring av energi finne farten v_B :

$$\begin{aligned} \frac{7}{10} m v_0^2 &= m g R' (1 + \sin \theta) + \frac{7}{10} m v_B^2 \\ \Rightarrow v_B^2 &= v_0^2 - \frac{10}{7} (1 + \sin \theta) g R'. \end{aligned} \quad (1)$$

b. Kula mister kontakten med underlaget når $F_N = 0$. I sentripetalretningen virker i tillegg til normalkrafta F_N også tyngdens komponent $m g \sin \theta$ (i samme retning), og (N2-rot) gir

$$m a_c = m v_B^2 / R' = F_N + m g \sin \theta$$

Vi bestemmer θ i det $F_N = 0$ og v_B^2 har vi fra likn. (1). Dette gir

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{v_B^2}{g R'} = \frac{v_0^2}{g R'} - \frac{10}{7} (1 + \sin \theta) \\ \sin \theta &= \left(\frac{v_0^2}{g R'} - \frac{10}{7} \right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{10}{7}} = \left(\frac{(2,5)^2}{9,81 \cdot 0,20} - \frac{10}{7} \right) \cdot \frac{7}{17} = 0,723 \\ \theta &= \underline{46,3^\circ}. \end{aligned}$$

der vi har brukt $R' = R - r = 0,200$ m.

Oppgave 4. Termodynamikk.

a. Antall mol fra ideell gasslov. Trykket $1 \text{ atm} = 101300 \text{ N/m}^2$ er oppgitt i formelliste.

$$n_A = n_B \equiv n = \frac{p_{A,0} V_{A,0}}{R T_{A,0}} = \frac{101300 \text{ N/m}^2 \cdot 5,00 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{8,31 \text{ J/(K mol)} \cdot 273 \text{ K}} = 2,233 \text{ mol} = \underline{2,23 \text{ mol}}$$

b. Rom B er varmeisolert slik at kompresjonen i B er adiabatisk. Bruker derfor adiabatlikningen for p og V for gassen i B. Gassen er toatomig med $n_f = 5$ og derfor (formelark) $\gamma = \frac{n_f + 2}{n_f} = \frac{7}{5}$.

$$p_B V_B^\gamma = p_{B,0} V_{B,0}^\gamma \Rightarrow V_B = V_{B,0} \cdot \left(\frac{p_{B,0}}{p_B} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_{B,0} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{5}{7}} = V_{B,0} \cdot 0,4562 = 2,281 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = \underline{2,28 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}$$

c. Betrakt totalsystemet A+B, dette gjør intet ytre arbeid da totalvolumet er konstant. Ved bruk av 1. lov på totalsystemet får vi da:

$$dQ = dU_{\text{tot}} + dW_{\text{tot}} = dU_A + dU_B + 0.$$

For ideell gass er (formelark) $dU = n C_V dT$ med (formelark) $C_V = \frac{1}{2} n_f R$ og dermed: Enatomig: $C_{V,A} = \frac{3}{2} R = 12,47 \text{ J/(K mol)}$. Toatomig: $C_{V,B} = \frac{5}{2} R = 20,79 \text{ J/(K mol)}$.

$$\begin{aligned} Q &= \Delta U_A + \Delta U_B = n C_{V,A} (T_A - T_{A,0}) + n C_{V,B} (T_B - T_{B,0}) \\ &= 2,233 \text{ mol} \cdot 12,47 \text{ J/(K mol)} \cdot (1264 - 273) \text{ K} + 2,233 \text{ mol} \cdot 20,79 \text{ J/(K mol)} \cdot (373,6 - 273) \text{ K} \\ &= 27,59 \text{ kJ} + 4,67 \text{ kJ} = \underline{32,3 \text{ kJ}}. \end{aligned}$$

Kunne også betraktet system A: $Q = Q_A = \Delta U_A + W_A$. Arbeidet W_A må integreres, men kan unngås ved: $W_A = -W_B = \Delta U_B$ (fordi adiabatisk prosess i B), og vi ender opp med samme likningen som over.

d. Prosessen i B er reversibel og adiabatisk, da er

$$\underline{\Delta S_B = 0}$$

For rom A er det enkleste er å bruke formel for entropi S for ideell gass fra formelarket:

$$\Delta S_{12} = n C_{V,A} \ln \frac{T_2}{T_1} + n R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

som for rom A gir

$$\Delta S_A = nC_{V,A} \ln \frac{T_A}{T_{A,0}} + nR \ln \frac{V_A}{V_{A,0}}$$

med tallverdier

$$\Delta S_A = 2,233 \text{ mol} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8,31 \text{ J/(K mol)} \cdot \ln \frac{1264}{273} + 2,233 \text{ mol} \cdot 8,31 \text{ J/(K mol)} \cdot \ln \frac{7,719}{5,00} = \underline{50,7 \text{ J/K}}$$

ALTERNATIV beregning fra definisjonen av ΔS : Idet entropien S er en tilstandsfunksjon, kan vi beregne ΔS_A via enhver valgt prosess med samme start/slutt. Med 0=starttilstand ($p_{A,0}, V_{A,0}$) og 1=slutttilstand (p_A, V_A) velger vi en mellomtilstand 2=($p_{A,0}, V_A$). Da er $0 \rightarrow 2$ en isobar prosess (øker volumet $V_{A,0} \rightarrow V_A$) og $2 \rightarrow 1$ en isokor prosess (øker trykket $p_{A,0} \rightarrow p_A$). Temperaturen i mellomtilstanden er

$$T_2 = \frac{p_{A,0} V_A}{nR} = p_{A,0} V_A \cdot \frac{T_{A,0}}{p_{A,0} V_{A,0}} = T_{A,0} \cdot \frac{V_A}{V_{A,0}}$$

Da er

$$\Delta S_A = \int_0^2 \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} + \int_2^1 \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = \int_0^2 \frac{nC_p dT}{T} + \int_2^1 \frac{nC_{V,A} dT}{T} = nC_p \ln \frac{T_2}{T_{A,0}} + nC_{V,A} \ln \frac{T_A}{T_2}$$

Nå er $nC_p = nC_{V,A} + nR$:

$$\Delta S_A = nR \ln \frac{T_2}{T_{A,0}} + nC_{V,A} \ln \left(\frac{T_2}{T_{A,0}} \cdot \frac{T_A}{T_2} \right) = nR \ln \frac{V_A}{V_{A,0}} + nC_{V,A} \ln \frac{T_A}{T_{A,0}}$$

som ovenfor.