

Eksamen 15. aug. 2017. Løsningsforslag

Oppgave 1. Flervalgsoppgaver

Oppgave:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rett svar:	B	D	E	A	C	C	A	A	E	B
Oppgave:	11	12	13	14	15	16	17	18		
Rett svar:	A	B	A	C	A	D	A	C		

Detaljer om spørsmålene:

1-1. B. Kin. energi = pot. energi: $\frac{1}{2}(m+3m)v^2 = mgh$ gir $v = \sqrt{\frac{1}{2}gh}$.

1-2. D. Trinsa følger med bevegelsen med $\omega = v/R$ og har kinetisk energi $\frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2v^2/R^2 = \frac{1}{2}mv^2$. Klossene har kin. energi $\frac{1}{2}(m+3m)v^2 = 2mv^2$. Kin. en. = pot. energi: $\frac{5}{2}mv^2 = mgh$ gir $v = \sqrt{\frac{2}{5}gh}$.

1-3. E. Fra oppgitt $x(t)$ og $y(t)$ er $a_x = \ddot{x}(t) = R\omega^2 \sin \omega t$ og $a_y = \ddot{y}(t) = R\omega^2 \cos \omega t$ slik at $|a| = \sqrt{R^2\omega^4(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} = R\omega^2 = V^2/R$. Eller enklere: Rullebevegelsen er sammensatt av translasjon V og rotasjon ω der $V = \omega R$. Translasjonen har ingen akselerasjon, rotasjonen har sentripetalakselerasjon $a_c = \omega^2 R = V^2/R$.

1-4. A. Landingen på karusellen er et uelastisk støt, så (mekanisk) energi E for systemet kan ikke være bevart. Akslingen som står fast i bakken, virker på systemet med en kraft når studenten lander. Dermed kan heller ikke systemets bevegelsesmengde p være bevart. Men denne kraften fra akslingen representerer ikke noe kraftmoment mhp. en akse gjennom karusellens sentrum, slik at spinn L er bevart.

1-5. C. Når kulene henger sammen er dette et fullstendig uelastisk støt, og det vil tapes energi. Under en kollisjon uten ytre krefter er alltid p og L bevart (her er sammenhengen $L = \ell p$ for hver av kulene, der ℓ er snorlengden).

1-6. C. Mekanisk energi er bevart, så hastigheten er mindre på toppen enn ved bunnen. Dette er nok til å fastslå at C er riktig figur, siden sentripetalakselerasjonen er v^2/r . På høyre og venstre side har vi i tillegg baneakselerasjonen g retta nedover, som gir total akselerasjon på skrå nedover og inn mot midten.

1-7. A. Bruk Steiners sats: $I = I_{\text{cm}} + Mh^2$.

1-8. A. Amplituden x_0 er altså uendra. I ytterstilling er $v = 0$ og kin. energi lik null, slik at total energi er lik potensiell energi $= \frac{1}{2}kx_0^2$ og uendra. (Hastigheten ved $x = 0$ blir mindre slik at $\frac{1}{2}mv_0^2$ også holdes uendra.)

1-9. E. I en isobar prosess endres både T og V , dermed endres U og det er arbeid $dW = pdV$. Det er generelt også varmeutveksling dQ .

1-10. B. Ved adiabatisk ekspansjon faller temperaturen fordi $\Delta U = W < 0$. Areal under pV -kurve og dermed arbeidet er mindre enn for isoterm, uansett temperatur og V_2/V_1 .

1-11. A. 1. Hovedsetning: $Q = \Delta U + W$. Temp. øker likt $\Rightarrow \Delta U > 0$ og lik i begge. Konstant volum: $W = 0$. Volumet må øke når T skal øke med konstant trykk, dvs. $W > 0$, dermed Q_p størst. Eller: $Q_p = nC_p\Delta T > nC_V\Delta T = Q_v$ fordi $C_p > C_V$.

1-12. B. Arbeid $W =$ varme inn - varme ut. Effektivitet $e = \frac{W}{Q_{\text{inn}}} = \frac{Q_{\text{inn}} - Q_{\text{ut}}}{Q_{\text{inn}}} = \frac{64 - 42}{64} = 0,34$.

1-13. A. Ekvipartisjonsprinsippet sier at energien fordeles med $\frac{1}{2}k_B T$ per frihetsgrad per molekyl, uansett masse. Per atom blir det derfor like mye (indre) energi U for de to enatomige gassene siden begge har tre frihetsgrader.

1-14. C. Varmekapasitet per partikkel i en ideell gass er av størrelsesorden k_B , mens varmekapasiteten per mol er av størrelsesorden R .

1-15. A. 1.hovedsetning: $\Delta U = Q - W > 0$ og lik for alle. Arbeid W er lik areal under prosesskurva og positiv for alle, derfor må $Q = \Delta U + W > 0$ og størst for prosessen med størst W . Arbeid er lik areal under prosesskurva, størst for prosess 1.

1-16. D. En Carnot-prosess består av to isotermer og to isentropiske prosesser, dvs. med hhv. T konstant og S konstant. Dermed et rektangel i et (S, T) -diagram.

1-17. A. Temp.økning fra $T = (227 + 273) \text{ K} = 500 \text{ K}$ til $T' = 700 \text{ K}$ gir $\frac{P'}{P} = \frac{\sigma T'^4 - \sigma T_{\text{omg}}^4}{\sigma T^4 - \sigma T_{\text{omg}}^4} = \frac{700^4 - 273^4}{500^4 - 273^4} = 4,1$.

1-18. C. Varmestrømmen avtar omvendt proporsjonal med tykkelsen ℓ : $\dot{Q} = Aj = \kappa \Delta T A / \ell$

Oppgave 2. Translasjon og rulling

a. Energibevarelse, fjæras potensielle energi overføres til kinetisk energi for kula:

$$\frac{1}{2} k b^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow k = \frac{m v_1^2}{b^2} = \frac{0,500 \text{ kg} \cdot (1,40 \text{ m/s})^2}{(0,0400 \text{ m})^2} = 612,5 \text{ N/m} = \underline{613 \text{ N/m}}.$$

Her kan man ikke bruke noen form for konstant-akselerasjons-likninger, da akselerasjonen øker fra maks ved fullt fjærutslag til null når kula slipper fjæra.

b. Under rulling er $v_B = \omega_B R$, som gir kinetisk energi

$$\begin{aligned} E_{k,B} &= E_{k,\text{trans}} + E_{k,\text{rot}} = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} I \omega_B^2 \\ E_{k,B} &= \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} m R^2 \frac{v_B^2}{R^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{5} \right) m v_B^2 = \underline{\underline{\frac{7}{10} m v_B^2}} \end{aligned}$$

c. Friksjonskrafta er konstant så lenge kula glir, og lik $F_f = -\mu mg$, med positiv i rulleretningen. Dette er eneste kraft i horisontal retning (en figur vil gjøre seg her), og Newtons 2.lov gir da at translasjonsakselerasjonen er konstant og lik

$$a = \frac{F_f}{m} = \underline{\underline{-\mu g}}. \quad (1)$$

d. Den "tidløse" konstant-akselerasjonslikningen gir bestemmelse av μ idet v_B og v_A er kjent:

$$v_B^2 - v_A^2 = 2as = -2\mu gs \Rightarrow \mu = \frac{v_A^2 - v_B^2}{2gs} = \frac{(1,40 \text{ m/s})^2 - (1,00 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,81 \cdot 0,326 \text{ m/s}^2} = \underline{\underline{0,150}}.$$

Alternativt kan man komme fram til denne likningen ved å sette tap i kinetisk translasjonsenergi lik translasjonsarbeid:

$$\Delta E_{k,\text{trans}} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W_f = F_f \cdot s = -\mu mg \cdot s \Rightarrow v_B^2 - v_A^2 = -2\mu g \cdot s,$$

som gir samme uttrykk som ovenfor. Men man kan *ikke* bruke friksjonsarbeid = endring i total kinetisk energi, dvs. følgende er feil:

$$\Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A} = \frac{7}{10} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W_f = F_f \cdot s = -\mu mg \cdot s.$$

Her måtte man ha brukt s_{slur} som er den strekningen kuleoverflata har sluret, se ALTERNATIV løsning under d. nedenfor.

Kan evt. finne tallverdi $a = -\mu g = -0,15 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = -1,47 \text{ m/s}^2$. Mange hadde funnet tallverdi for a først ved å bruke likningen $v_B^2 - v_A^2 = 2as$, for deretter å finne μ fra likn. (1), og det er selvsagt greit.

Oppgave 3. Termodynamikk

a. Antall mol fra ideell gasslov. Trykket $1 \text{ atm} = 101300 \text{ N/m}^2$ er oppgitt i formelliste.

$$n_A = n_B \equiv n = \frac{p_{A,0} V_{A,0}}{RT_{A,0}} = \frac{101300 \text{ N/m}^2 \cdot 5,00 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{8,31 \text{ J/(K mol)} \cdot 273 \text{ K}} = 2,233 \text{ mol} = \underline{\underline{2,23 \text{ mol}}}.$$

b. Gassen er toatomig med (oppgitt) $n_f = 5$ og derfor (formelark) $\gamma = \frac{n_f + 2}{n_f} = \underline{\underline{\frac{7}{5}}}$.

c. Rom B er varmeisolert slik at kompresjonen i B er adiabatisk. Bruker derfor adiabatlikningen for T og V for gassen i B.

$$\begin{aligned} T_B V_B^{\gamma-1} &= T_{B,0} V_{B,0}^{\gamma-1} \\ \Rightarrow V_B &= V_{B,0} \cdot \left(\frac{T_{B,0}}{T_B} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = V_{B,0} \cdot \left(\frac{273}{373,6} \right)^{\frac{5}{2}} = V_{B,0} \cdot 0,4564 = 2,282 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = \underline{\underline{2,28 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}} \end{aligned}$$

d. Betrakt totalsystemet A+B, dette gjør intet ytre arbeid da totalvolumet er konstant. Ved bruk av 1. lov på totalsystemet får vi da:

$$dQ = dU_{\text{tot}} + dW_{\text{tot}} = dU_A + dU_B + 0.$$

For ideell gass er (formelark) $dU = n C_V dT$ med (formelark) $C_V = \frac{1}{2} n_f R$ og dermed: Enatomig: $C_{V,A} = \frac{3}{2} R =$

12, 47 J/(K mol). Toatomig: $C_{V,B} = \frac{5}{2}R = 20, 79 \text{ J/(K mol)}$.

$$\begin{aligned} Q &= \Delta U_A + \Delta U_B = n C_{V,A}(T_A - T_{A,0}) + n C_{V,B}(T_B - T_{B,0}) \\ &= 2, 233 \text{ mol} \cdot 12, 47 \text{ J/(K mol)} \cdot (1264 - 273) \text{ K} + 2, 233 \text{ mol} \cdot 20, 79 \text{ J/(K mol)} \cdot (373, 6 - 273) \text{ K} \\ &= 27, 59 \text{ kJ} + 4, 67 \text{ kJ} = \underline{32, 3 \text{ kJ}}. \end{aligned}$$

Kunne også betraktet system A: $Q = Q_A = \Delta U_A + W_A$. Arbeidet W_A må integreres, men kan unngås ved: $W_A = -W_B = \Delta U_B$ (fordi adiabatisk prosess i B), og vi ender opp med samme likningen som over.

e. Prosessen i B er reversibel og adiabatisk, da er $\Delta S_B = 0$.

For rom A er det enkleste er å bruke formel for entropi S for ideell gass fra formelarket:

$$\Delta S_{12} = n C_{V,A} \ln \frac{T_2}{T_1} + n R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

som for rom A gir

$$\Delta S_A = n C_{V,A} \ln \frac{T_A}{T_{A,0}} + n R \ln \frac{V_A}{V_{A,0}}.$$

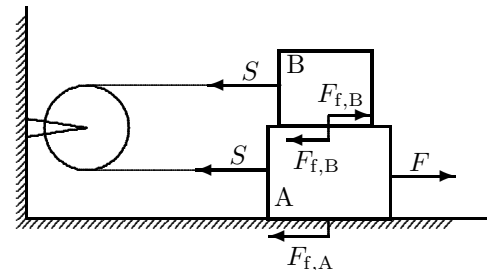
Nå er $V_A = V_{\text{tot}} - V_B = 10, 00 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 - 2, 282 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 7, 718 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$ slik at

$$\Delta S_A = 2, 233 \text{ mol} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8, 31 \text{ J/(K mol)} \cdot \ln \frac{1264}{273} + 2, 233 \text{ mol} \cdot 8, 31 \text{ J/(K mol)} \cdot \ln \frac{7, 718}{5, 00} = \underline{50, 7 \text{ J/K}}$$

Oppgave 4. Uavhengige småoppgaver.

a. Friksjon. Figuren viser alle krefter i horisontal retning på kloss A og B. I tillegg virker vertikale krefter (som ikke er tegnet i figuren): Tyngdekrefter m_A og m_B på henholdsvis A og B, normalkraft $F_{N,A}$ oppover fra underlaget på A, normalkraft $F_{N,B}$ nedover på A fra kloss B og $F_{N,B}$ oppover på B fra A. Aktuell bevegelse for de to klossene er mot høyre for A og mot venstre for B.

Ved å øke F vil, umiddelbart før klossene beveger seg, trekkrafta F være lik sum av krefter i motsatt retning på A. Newton 1 for A og tilsvarende for B gir:



$$F = S + F_{f,A} + F_{f,B} \quad (2)$$

$$S = F_{f,B} \quad (3)$$

der friksjonskreftene er

$$F_{f,A} = \mu_s F_{N,A} = \mu_s (m_A + m_B) g$$

$$F_{f,B} = \mu_s F_{N,B} = \mu_s m_B g$$

Snordrag S fra likn. (3) innsatt i likn. (2) og deretter friksjonskreftene innsatt, gir

$$F = F_{f,A} + 2F_{f,B} = \mu_s (m_A + 3m_B) g = 0, 60 \cdot (5, 00 \text{ kg} + 3 \cdot 3, 00 \text{ kg}) \cdot 9, 81 \text{ m/s}^2 = 82, 4 \text{ N} = \underline{82 \text{ N}}.$$

b. Statikk. Finner først S fra tauet: Kraftmomentbalanse om bjelkens venstre punkt:

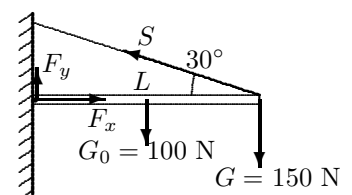
$$S \cdot \sin 30^\circ \cdot L = G \cdot L + G_0 \cdot L/2 \Rightarrow S = \frac{G + G_0/2}{\sin 30^\circ} = \frac{200 \text{ N}}{1/2} = 400 \text{ N}.$$

$\sum F_x = 0$ gir at krafta på bjelken fra hengslingen er lik snorkraftas x -komponent:

$$F_x = S_x = S \cos 30^\circ = (G + G_0/2) \cdot \cot 30^\circ = 200 \text{ N} \cdot \sqrt{3} = \underline{346, 4 \text{ N}}.$$

Vertikalkomponenten av krafta fra hengslingen, F_y , finnes enklest fra momentbalanse om høyre endepunkt av bjelken:

$$F_y \cdot L = G_0 \cdot L/2 \Rightarrow F_y = G_0/2 = \underline{50 \text{ N}}.$$



c. Kollisjon. Bevegelsesmengden er bevart: $mv = m \cdot v/2 + 4m \cdot V$, som gir at klossens fart etter støtet er

$$V = \frac{mv/2}{4m} \cdot v = \frac{1}{8}v.$$

Tapet av kin.en. er

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2 - \left(\frac{1}{2}m(v/2)^2 + \frac{1}{2}4m \cdot V^2 \right) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{8}mv^2 - \frac{1}{32}mv^2 = \frac{11}{32}mv^2.$$

dvs. andel av opprinnelig energi

$$\frac{\Delta E_k}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{11/32}{1/2} = \frac{11}{16} = 69\%.$$

d. Varmedledning.

Siden temperaturen på ytterflatene (T_v og T_h) er gitt, trenger vi ikke ta med varmeovergangen $\alpha\Delta T$ for disse flatene. Med $\kappa_a = 3\kappa_b$ og $a = 2b$ kan varmestrom $j = \kappa\Delta T/\ell$ gjennom hvert lag uttrykkes:

$$\begin{aligned} j_A &= 3\kappa_b \cdot (T_v - T)/2b \\ j_B &= \kappa_b \cdot (T - T_h)/b \end{aligned}$$

Ved stasjonære forhold (konstant T) er varmestrommen den samme gjennom begge lag, $j_A = j_B$, og dette gir

$$(3/2) \cdot (T_v - T) = (T - T_h) \quad \Rightarrow \quad 3T_v - 3T = 2T - 2T_h \quad \Rightarrow \quad T = \frac{3}{5}T_v + \frac{2}{5}T_h = \underline{52^\circ\text{C} \quad (325\text{ K})}.$$

Med kjennskap til elektriske kretser kan man trekke veksler på analogien til Ohms lov: $I = V/R$ med varmestromtetthet j analog til strømmen I og drivkraft ΔT analogi til spenning V . Dette er seriekopling av to motstander med (termisk) resistans $R = R_A + R_B = a/\kappa_a + b/\kappa_b = 2b/3\kappa_b + b/\kappa_b = 5/3 \cdot b/\kappa_b$. Dermed er

$$j = \frac{\Delta T}{R} = \frac{3}{5} \frac{\kappa_b}{b} \Delta T \quad \Rightarrow \quad T = T_h + j \cdot R_B = T_h + \frac{3}{5} \frac{\kappa_b}{b} \Delta T \cdot \frac{b}{\kappa_b} = T_h + \frac{3}{5} \Delta T = \underline{52^\circ\text{C}}.$$