

Bokmål

Kandidatnr.....

Studieretning.....

Side.....

Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk, NTNU

Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Dag W. Breiby

Tlf.: 984 54 213

KONTINUASJONSEKSAMEN I EMNE TFY4125 - FYSIKK

Fredag 13. august 2010

Tid: 0900-1300

Tillatte hjelpemidler: Kode C:

Typegodkjent kalkulator, med tomt minne

K. Rottmann: Matematisk Formelsamling

S. Barnett & T.M. Cronin: Mathematical Formulae

Eksamenssettet er utarbeidet av førsteamanuensis Dag W. Breiby og professor Tore Lindmo og består av:

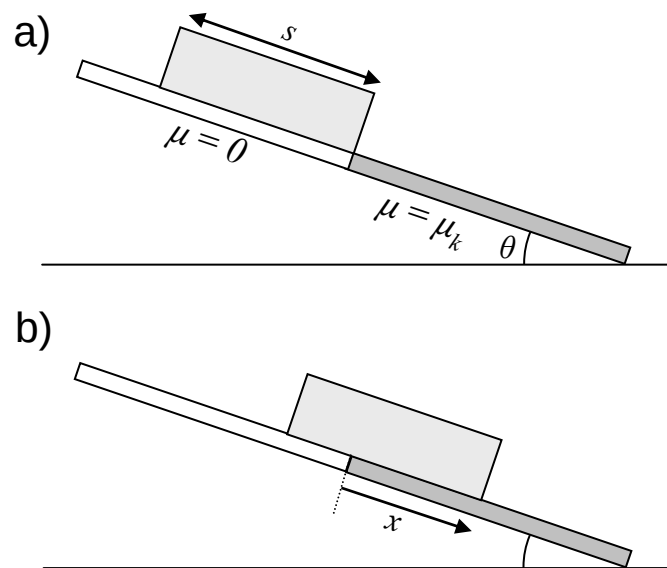
Oppgavetekst til "vanlige" oppgaver 1-5

side 2-6

Vedlegg: Formelark

side 7-9

Hvert delspørsmål a) b) etc. i oppgavene 1-5 teller likt, med til sammen 80 % for alle 14 delspørsmål. De resterende 20 % utgjøres av midtsemesterprøven.

Oppgave 1. Kloss på stripete skråplan

En kloss med masse m og lengde s sklir nedover et skråplan. Skråplanet har et friksjonsfritt område, og et område hvor friksjonskoeffisienten mellom klossen og skråplanet er μ_k . Vi definerer $x = 0$ til å være posisjonen hvor den nederste kanten av klossen ligger på grensen mellom det glatte og det ru underlaget (som vist i a)). Vi ser bort fra komplikasjoner med statisk friksjon i denne oppgaven.

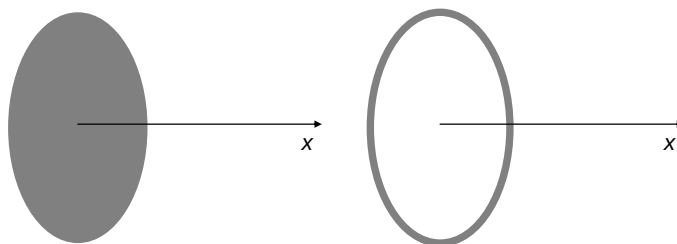
- a) Vis at akselerasjonen til en kloss langs et generelt skråplan med friksjonskoeffisient μ_k er gitt ved $a = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$.

Begrunn at for $x \in (0, s)$ kan friksjonen modelleres med en effektiv friksjonskoeffisient $\mu_{eff}(x) = C \cdot x$ og bestem konstanten C .

Finn også uttrykk for μ_{eff} i områdene $x < 0$, og $x > s$.

- b) Klossen holdes i ro og slippes fra $x = 0$. Etter å ha sklidd en strekning $x_0 < s$ antas klossens akselerasjon å være lik 0. Finn et uttrykk for x_0 . Tegn fritt legeme kraftdiagram som viser kreftene som virker på klossen ved $x = x_0$.
- c) Bruk energibetraktninger til å bestemme den totale strekningen x_{tot} klossen sklir før den stopper. Det forutsettes at $x_{tot} \leq s$. Vis at denne forutsetningen leder til et uttrykk for minimumsverdien av μ_k .

Oppgave 2. Elektrisk potensial fra skiver og ringer



Det kan vises at det elektriske potensialet på aksen i avstand x fra en skive ("disk") med radius R og overflateladningstetthet σ (per arealenhet) er gitt ved

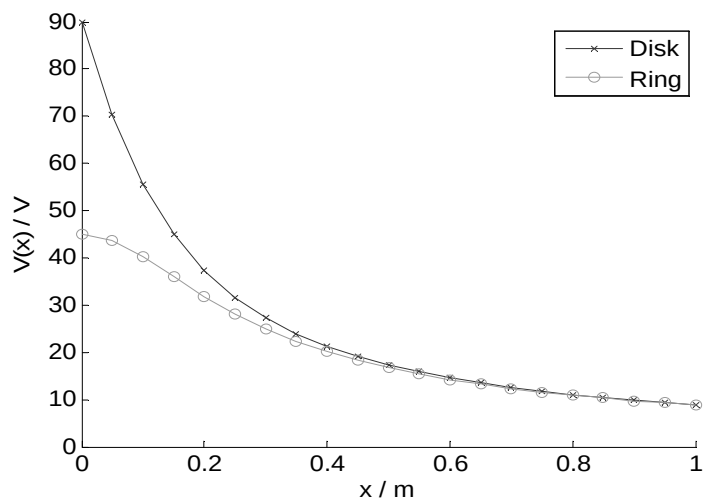
$$V_D = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{x^2 + R^2} - x \right), \quad x > 0.$$

Potensialet fra en ring, også med radius R , og ladningstetthet λ (per lengdeenhet) er gitt ved

$$V_R = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda R}{\sqrt{x^2 + R^2}}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

I begge tilfeller beskriver ligningene feltet på symmetriaksen i vakuum, og x angir avstanden fra senteret av skiven (eller ringen), som vist i figuren.

- a) Skriv om uttrykkene for V_D og V_R med totalladningen Q i stedet for σ og λ .



- b) Vis at i grensetilfellet $x \rightarrow \infty$ er V_R gitt ved

$$V_R = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x}$$

Finn også et uttrykk for V_D i grensen $x \rightarrow \infty$.
Kommenter svarene.

Vi antar i resten av oppgaven at disken og ringen har like store ladninger, $Q = 1,0 \text{ nC}$, og at $R = 0,3 \text{ m}$. Potensialet for skiven og ringen for disse parameterne er plottet i figuren ovenfor. I resten av oppgaven gjør et elektron nytten som testpartikkel.

- c) Vi lar potensialet være gitt ved V_R . Finn kraften (uttrykk og tallsvar) som virker på testpartikkelen når den er i posisjon $x = 0,2 \text{ m}$.
- d) Hvor stort arbeid må utføres for å flytte partikkelen fra $x = 0,2 \text{ m}$ til $x = 1,0 \text{ m}$? Hvis elektronet slippes ved $x = 1,0 \text{ m}$, hvor stor hastighet har det når det passerer $x = 0,2 \text{ m}$?

Oppgitt: $(1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ for små x .

Oppgave 3. Varmekraftmaskin

En prosess med ett mol av en ideell én-atomig gass starter ved A med $p_A = 1,0 \text{ atm}$ ($=1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$) og $T_A = 127 \text{ }^\circ\text{C}$, og kjøres gjennom følgende Carnot-prosess ABCDA: isoterm ekspansjon til to ganger det opprinnelige volumet ved B ($V_B = 2V_A$), adiabatisk ekspansjon til C med $V_C = 3V_A$, isoterm komprimering til D, og adiabatisk komprimering tilbake til utgangspunktet A.

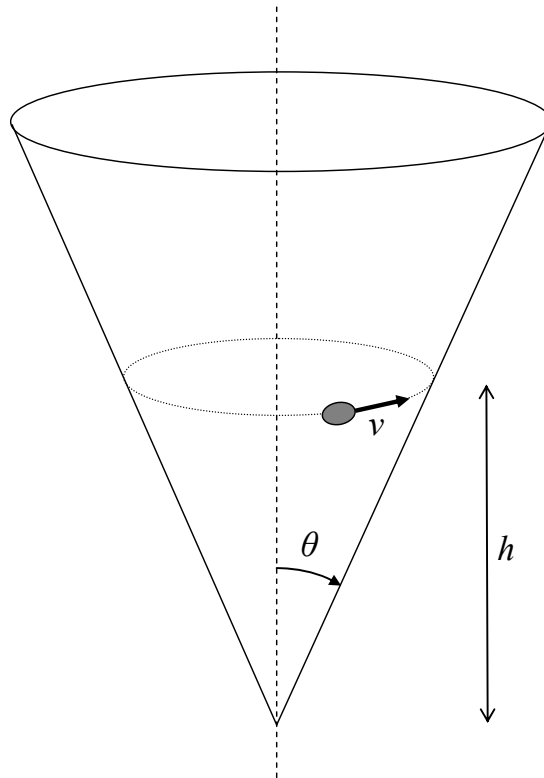
- a) Finn uttrykk og tallsvar (med SI-enheter) for tilstandsvariablene p_B , p_C , V_A og T_C .
- b) Skissér prosessen i et pV -diagram.
- c) Prosess-trinnene CD og DA kan beskrives ved ligningene

$$\text{CD:} \quad p(V) = p_C \frac{V_C}{V}$$

$$\text{DA:} \quad p(V) = p_A \left(\frac{V_A}{V} \right)^\gamma$$

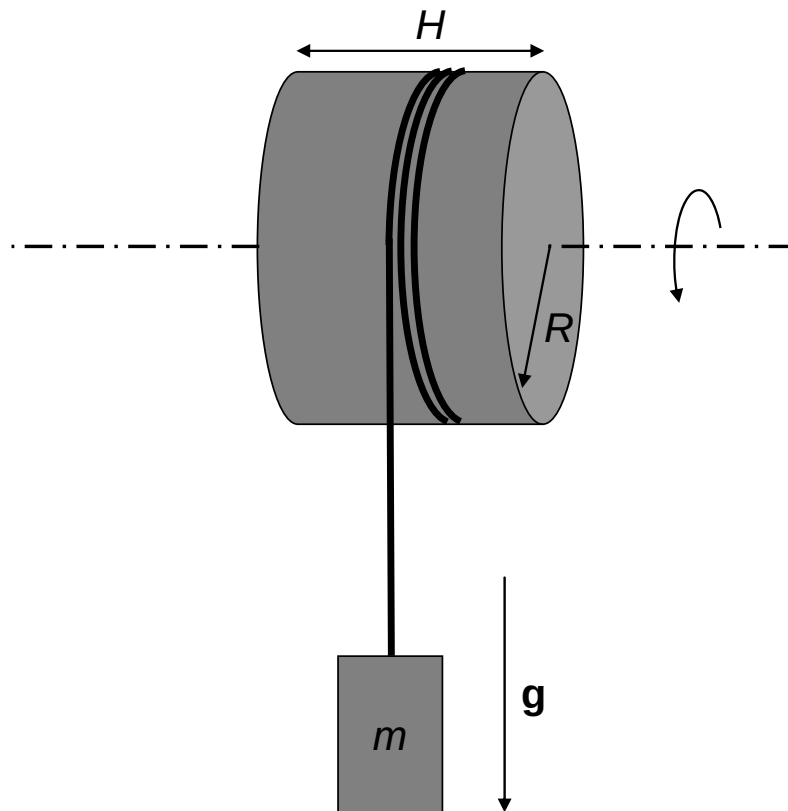
Bruk dette til å finne uttrykk og tallsvar for p_D og V_D .

- d) Finn et uttrykk for Q_{varm} .
- e) Regn ut varmekraftmaskinens virkningsgrad, og bruk dette til å finne arbeidet utført per syklus (uttrykk og tallsvar).

Oppgave 4. Bevegelse i trakt

En trakt har åpningsvinkel θ som vist i figuren. En kloss sklir friksjonsfritt i en sirkel inni trakten. Klossens hastighet v er tilpasset slik at den beveger seg med konstant høyde h .

Hvilke krefter virker på klossen? Sett opp uttrykk for kraftbalanse, og bruk dette til å bestemme forholdet U/K , der U og K er henholdsvis klossens potensielle og kinetiske energi.

Oppgave 5. Fallende lodd, roterende tønne

Et lodd med masse m henger i en ideell (masseløs og perfekt tøyelig) snor. Snora er festet i ytterkant av en kompakt homogen sylinder med radius R og høyde H , som kan rotere om sin senterakse slik figuren viser. Snordraget får sylindere til å rotere. Snora sklir ikke, og friksjonseffekter neglisjeres.

Gitt at $H = 30,0$ cm, $R = 10,0$ cm og $m = 18,0$ kg, bestem *massetettheten* ρ (masse per volum) til sylindere, slik at loddet faller med akselerasjon $g/2$.

Vedlegg: Formelliste for emnet TFY4125 Fysikk

Vektorstørrelser er i **uthevet** skrift.

Fysiske konstanter:

Ett mol: $M(^{12}\text{C}) = 12 \text{ g}$	$1 \text{ u} = 1.6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$N_A = 6.0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
$k_B = 1.3807 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$	$R = N_A k_B = 8.3145 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$	$0^\circ\text{C} = 273.15 \text{ K}$
$\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$	
$e = 1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	$m_e = 9.1094 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	
$c = 2.9997 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	$h = 6.6261 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$	$g = 9.81 \text{ m/s}^2$

Mekanikk:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \text{ der } \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = m\mathbf{v} = m d\mathbf{r} / dt; \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Konstant a : $v = v_0 + at$; $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$; $2as = v^2 - v_0^2$

$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$; $K = \frac{1}{2} mv^2$; $U(\mathbf{r})$ = potensiell energi. (tyngde: mgh ; fjær: $\frac{1}{2} kx^2$)

$\mathbf{F} = -\nabla U$; $F_x = -\frac{\partial}{\partial x} U(x, y, z)$; $E = \frac{1}{2} mv^2 + U(\mathbf{r}) + \text{friksjonsarbeid} = \text{konst.}$

Tørr friksjon: $|F_f| = \mu_s \cdot F_\perp$ eller $|F_f| = \mu_k \cdot F_\perp$; Viskøs friksjon: $\mathbf{F}_f = -k_f \mathbf{v}$

Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{F} = I\boldsymbol{\alpha}$, der $\mathbf{r}_0$ er valgt ref. punkt og I treghetsmomentet. $dW = \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta}$

Statisk likevekt: $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{0}$.

Massemiddelpunkt (tyngdepunkt): $\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$, $M = \sum_i m_i$

Elastisk støt: $\Sigma_i \mathbf{p}_i = \text{konstant}$; $\Sigma_i E_i = \text{konstant}$. Uelastisk støt: $\Sigma_i \mathbf{p}_i = \text{konstant}$.

Impuls: $\mathbf{I} = \Delta \mathbf{p}$, $\mathbf{I} = \int \mathbf{F}(t) dt$.

Vinkelhast.: $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{\mathbf{z}}$; $|\boldsymbol{\omega}| = \omega = d\theta / dt$; Vinkelakselerasjon: $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega} / dt$; $\alpha = d\omega / dt = d^2\theta / dt^2$

Sirkelbevegelse: $v = r\omega$; Sentripetalakselerasjon $a_r = -v\omega = -v^2 / r = -r\omega^2$

Baneaks.: $a_\theta = dv / dt = r d\omega / dt = r\alpha$; Rotasjonsenergi: $K_{rot} = \frac{1}{2} I\omega^2$, der I er treghetsmomentet.

$I \equiv \sum_i m_i r_{\perp i}^2 \rightarrow \int_V dV \rho r_\perp^2$. Akse gjennom masseiddelpunktet: $I \rightarrow I_0$.

Massiv kule: $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$; Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$; Kompakt sylinder / skive: $I_0 = \frac{1}{2} MR^2$;

Lang, tynn stav: $I_0 = \frac{1}{12} ML^2$; Parallellakseteoremet (Steiners sats): $I = I_0 + Mb^2$

Betingelser for ren rulling: $v = \omega R$; $a = \alpha R$.

Dreieimpuls: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. Spinn: $\mathbf{L}_{egen} = I_0 \boldsymbol{\omega}$. $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L} / dt$.

Hydrostatisk trykk: $p(h) = p_0 + \rho gh$; $m = \rho V$;

Bernoulli, langs strømlinje: $p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh = konst.$

Svingninger:

Udempet svingning: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$; $\omega_0 = \sqrt{k/m}$; $T = 2\pi / \omega_0$; $f_0 = 1/T = \omega_0 / 2\pi$

Pendel: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$; Fysisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{gmd/I}$; Matematisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{g/l}$

Termisk fysikk:

n = antall mol; $N = nN_A$ = antall molekyler; $\alpha = l^{-1} dl / dT$

$Q_{in} = \Delta U + W$; $C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$; (Varmekapasiteten kan være gitt pr. masseenhet eller pr. mol)

$PV = nRT = Nk_B T$; $PV = N \frac{2}{3} \langle K \rangle$; $\langle K \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} m \langle v_x^2 \rangle$; $\Delta W = P \Delta V$; $W = \int_1^2 P dV$

Molar varmekapasitet: $C_V = \frac{3}{2} R$ (en-atomig); $C_V = \frac{5}{2} R$ (to-atomig); $C_P = C_V + R$. $dU = C_V \cdot dT$.

For ideell gass: $\gamma \equiv C_P / C_V$. Adiat: $PV^\gamma = konst.$; $TV^{\gamma-1} = konst.$

Virkningsgrader for varmekraftmaskiner: $\varepsilon = W / Q_v$; Carnot: $\varepsilon = 1 - T_k / T_v$; Otto: $\varepsilon = 1 - 1/r^{\gamma-1}$

Kjøleskap: $\eta_K = \left| \frac{Q_k}{W} \right| \frac{Carnot}{T_v - T_k}$; Varmepumpe: $\eta_{VP} = \left| \frac{Q_v}{W} \right| \frac{Carnot}{T_v - T_k}$

Clausius: $\sum \frac{\Delta Q}{T} \leq 0$; $\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$; Entropi: $dS = \frac{dQ_{rev}}{T}$; $\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{dQ_{rev}}{T}$; $S = k_B \ln W$

Entropiendring i en ideell gass (per mol): $\Delta S_{12} = C_V \ln(T_2 / T_1) + R \ln(V_2 / V_1)$

Elektrisitet og magnetisme:

Coulomb: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}; \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}; V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$

Elektrisk felt: $\mathbf{E} = -\nabla V = -\left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right\rangle; E_x = -\frac{dV}{dx} \hat{\mathbf{x}}.$

Elektrisk potensial: $\Delta V = V_b - V_a = -\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \Delta U = Q\Delta V$

1. Gauss lov $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_S E_n dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$

2. Gauss lov for magnetisme $\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \oint_S B_n dA = 0$

3. Faradays lov $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = emf = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S B_n dA = -\int_S \frac{\partial B_n}{\partial t} dA$

4. Amperes lov $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 (I + I_D), I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon_0 \int_S \frac{\partial E_n}{\partial t} dA$

Fluks: $\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_S E_n \cdot dA; \Phi_M = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_S B_n \cdot dA.$

Kapasitans: $C \equiv \frac{Q}{V}$ For platekondensator: $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}. U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} Q^2 / C.$

Energitetthet: $u_E = \frac{U_E}{volum} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2; u_B = \frac{U_B}{volum} = \frac{1}{2\mu_0} B^2$

Biot-Savarts lov: $d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$

Lorentzkraften: $\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}); d\mathbf{F} = I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}).$