

Løsningsforslag Korteksamen TFY4125 6. aug. 2007.

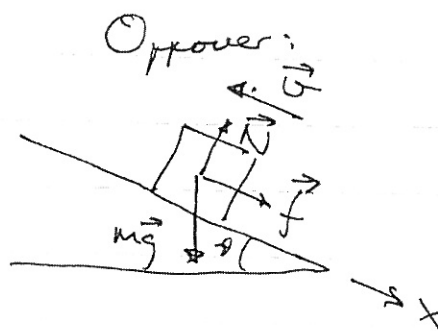
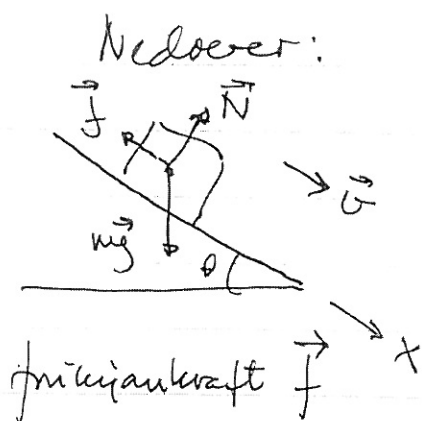
Oppgave 1.

- a) Grafen i figur 2b viser $\frac{ds}{dt}$, dvs. hastigheten for vogna på skråplanet, med positiv retning nedover skråplanet.

I pkt A har vogna max hastighet nedover skråplanet, mens hastigheten skifter til max negativ hastighet (dvs oppover) i pkt B.

Grafen fra A til B framstiller derfor kollisjonen med veggen nederst på skråplanet, hvor fjæra bremses ned bevegelsen og sender vogna oppover skråplanet etter støtet.

- b) Kraft-diagram:



(2)

Nedover: (regner positiv x-retning nedover skråplanet)

$$\sum F_x = mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta = m\ddot{x} = ma_{\text{ned}}$$

$$\underline{a_{\text{ned}} = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)}$$

Oppover:

$$\sum F_x = mg \sin \theta + \mu_k mg \cos \theta = ma_{\text{opp}}$$

$$\underline{a_{\text{opp}} = g(\sin \theta + \mu_k \cos \theta)}$$

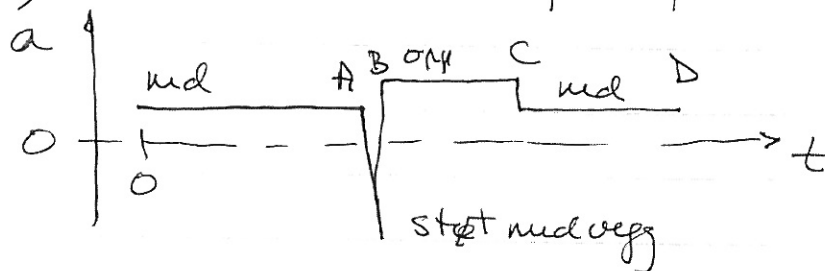
Se at $a_{\text{opp}} > 0$ alltid, det virker hele tiden nedover

Vognas bevegelse mellom B og C tilhører bevegelsen oppover skråplanet, på støtet i bunn nedst (B) i bunn, til toppen av bunn (C) hvor farten ~~hastigheten~~ er redusert til 0, i det vogna stier og begynner å gå nedover.

Mellom C og D er vogna på vei nedover skråplanet.

Stigningen for großen ~~to~~ er mindre i området CD enn i området BC fordi CD er bevegelse nedover, hvor $|a_{\text{ned}}| < |a_{\text{opp}}|$ fordi nedover virker friksjonskraften og tyngdens komponent langs skråplanet i motsatte retninger, og gir dermed mindre akselerasjon.

c) Skisse av akselerasjonen fra start til punkt D:



Middelakselerasjonen bestemmes ^{som gjennomsnittlig verdi} fra de intervaller i grafen hvor akselerasjonen er konstant
 dvs: a_{med} fra intervallet O-A og C-D
 a_{opp} ————— B-C.

d) Fra uttrykkene: ① $a_{med} = g(\sin\theta - \mu_k \cos\theta)$
 ② $a_{opp} = g(\sin\theta + \mu_k \cos\theta)$

finner vi ved ①+② $(a_{med} + a_{opp}) = 2g \sin\theta$

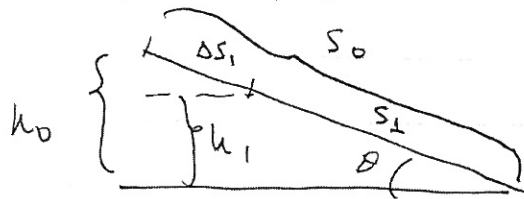
$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2g} (a_{opp} + a_{med}) \quad \text{q.e.d.}$$

$$\text{②} - \text{①}: (a_{opp} - a_{med}) = 2g \mu_k \cos\theta$$

$$\Rightarrow \mu_k = \frac{1}{2g \cos\theta} (a_{opp} - a_{med})$$

(4)

- e) Kinetisk energi i pkt (A) der. underet på skråplanet, før støt med vegg: K_1



$$K_1 = mg(h_0 - \mu_k \cos \theta \cdot S_0)$$

$$h_0 = m g \sin \theta \cdot S_0$$

Kinetisk energi etter støtet $K_2 = e K_1$, før vogna opp til høyde h_1 (distance S_1), men noe av energien tapas som friksjonsarbeid

$$\Rightarrow K_2 = m g S_1 \sin \theta + \mu_k m g \cos \theta \cdot S_1 = e K_1$$

$$\text{Setter inn for } K_1: e [\sin \theta - \mu_k \cos \theta] S_0 = (\sin \theta + \mu_k \cos \theta) S_1$$

$$\Rightarrow S_1 = e \cdot S_0 \frac{\sin \theta - \mu_k \cos \theta}{\sin \theta + \mu_k \cos \theta}$$

Daas:

$$\underline{\underline{\Delta S_1 = S_0 - S_1 = S_0 \left[1 - \frac{e(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)}{\sin \theta + \mu_k \cos \theta} \right] \text{ g.c.d.}}}$$

(5)

f) Situasjon I: $\mu_k = 0, e = 1$.

Derfor $\Delta S_1 = S_0 \left[1 - \frac{1 \cdot \sin \theta}{\sin \theta} \right] = 0$

I dette tilfellet er det friksjonsfri bevegelse, og støtet nederst på skråplanet er fullstendig elastisk. Det er derfor ingen friksjonskraft for bevegelsesenergien, og vogne kommer opp til utgangspunktet ($\Delta S_1 = 0$) for hver ned-opp tur.

Situasjon II: $\sin \theta = \mu_k \cos \theta$.

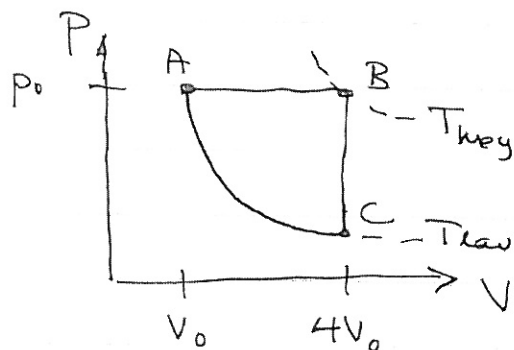
Derfor $\Delta S_1 = S_0 \left[1 - \frac{e \cdot 0}{\sin \theta + \mu_k \cos \theta} \right] = S_0$

I dette tilfellet motvirker friksjonskraften akselerert fagdelens komponent nedover skråplanet.

Dermed blir $a_{ned} = 0$, og vogne vil bli uendelig lang tid nedover skråplanet og ikke kunne tilbake oppover ($\Delta S_1 = S_0$).

(6)

Oppgave 2. Varvekraft nærkeni.



Ideell, toatamig gas
 $\gamma = c_p/c_v = 7/5$.

AB: isobar $\Delta p = 0$

BC: isokor $\Delta V = 0$

CA: isoterm $\Delta T = 0$

a) Bestem P_C , $T_{\text{høy}} = T_B$

Hagitt P , V og T for tilstand A.

Brüker tilstandsligninga (ideell gas) mellom tilstandene A og C:

$$\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_C V_C}{T_C}$$

Insatt kjente størrelser:

$$\frac{P_0 V_0}{T_{\text{lav}}} = \frac{P_C \cdot 4V_0}{T_{\text{lav}}} \Rightarrow \underline{\underline{P_C = \frac{1}{4} P_0}}$$

Brüker tilstandsligninga mellom A og B:

$$\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_B V_B}{T_B}$$

(7)

Drusatt kjente størrelser:

$$\frac{p_0 V_0}{T_{\text{lav}}} = \frac{p_0 4V_0}{T_{\text{høy}}} \Rightarrow \underline{\underline{T_{\text{høy}} = 4 T_{\text{lav}}}}$$

Øre grunn for effektiviteten (Carnot teorem)

$$\underline{\underline{\epsilon_{\text{carnot}} = 1 - \frac{T_{\text{lav}}}{T_{\text{høy}}} = 1 - \frac{T_{\text{lav}}}{4 T_{\text{lav}}} = 1 - \frac{1}{4} = 0,75}}$$

b) Arbeidet for en full syklus:

$$W_{\text{tot}} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA}.$$

Grunnsett: $W = \int_1^2 p dV$

Isobar prosess AB: $\underline{\underline{W_{AB} = \int_A^B p dV = p_0 (V_B - V_A) = 3 p_0 V_0}}$

Isobar prosess BC: $\underline{\underline{W_{BC} = \int_B^C p dV = 0}}$ fordi $dV = 0$.

Isoterm prosess CA: $W_{CA} = \int_C^A p dV$ $pV = nRT_{\text{lav}} = \text{konstant}$
 $\Rightarrow W_{CA} = nRT_{\text{lav}} \int_C^A \frac{dV}{V} = nRT_{\text{lav}} \left[\ln V \right]_{V_C}^{V_A} = nRT_{\text{lav}} \left[\ln V_0 - \ln 4V_0 \right]$

$$\underline{\underline{W_{CA} = nRT_{\text{lav}} \ln\left(\frac{V_0}{4V_0}\right) = -nRT_{\text{lav}} \ln 4 = -p_0 V_0 \ln 4}}$$

$$\underline{\underline{W_{\text{tot}} = p_0 V_0 [3 - \ln 4] > 0}}$$

$W_{\text{tot}} > 0$ også fordi prosessen går med klokke ABC.

c) Gjennantøring av prosessen.

AB: Isobar: Varmer opp gassen via flammen, samtidig bevege stempelsett utover slik at trykket holdes konstant. Gjennantøring prosessen langsomt, slik at den kan stoppes ved $V_B = 4V_0$, hele tiden und $p = p_0$.

BC: Isobar: Avkjøle gassen via varmeledning til avgivelsen over tid (gassflammen er slukket) hele tiden holde stempelsett i ro ($V = 4V_0$), og venke til $p_C = \frac{1}{4} p_0$

CA: Komprimere gassen ved å trykke stempelsett innover, langsomt, slik at temperaturen holder konstant på T_{avg} ved at varme kontinuerlig avgis til avgivelsen ved varmeledning.

d) Entropiendring

ideell
Følg gassen fra tilstand 1 til tilstand 2:

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = \int_1^2 \frac{1}{T} (dU + dW)_{\text{rev.}}$$

$$dQ_{\text{rev}} = nC_v dt + p dV$$

(9)

$$\Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{n C_v dT}{T} + \int \frac{p dV}{T}$$

$$p \cdot V = nRT$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{V} \cdot nRT$$

$$\Delta S_{12} = n C_v \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \int \frac{1}{V} \cdot nRT \cdot \frac{1}{T} dV$$

$$\underline{\underline{\Delta S_{12} = n C_v \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}}$$

q.e.d. (ilike
spirit after).

Für weiter an delpressen:

$$AB: \Delta S_{AB} = n C_v \cdot \ln\left(\frac{T_{\text{high}}}{T_{\text{low}}}\right) + nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

$$\Delta S_{AB} = n C_v \cdot \ln\left(\frac{4 T_{\text{low}}}{T_{\text{low}}}\right) + nR \ln\left(\frac{4 V_0}{V_0}\right)$$

$$\Delta S_{AB} = (n C_v + nR) \ln 4$$

$$C_v + R = C_p = \frac{7}{2} R$$

$$\Delta S_{AB} = \frac{7}{2} nR \cdot \ln 4$$

$$nR = \frac{p_0 V_0}{T_{\text{low}}}$$

$$\underline{\underline{\Delta S_{AB} = \frac{7}{2} \cdot \frac{p_0 V_0}{T_{\text{low}}} \cdot \ln 4}}}$$

$$BC: \Delta S_{BC} = n C_v \cdot \ln\left(\frac{T_{\text{low}}}{T_{\text{high}}}\right) + nR \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right)$$

$$\Delta S_{BC} = n C_v \cdot \ln\left(\frac{T_{\text{low}}}{4 T_{\text{low}}}\right) + nR \ln\left(\frac{4 V_0}{4 V_0}\right)$$

$$\underline{\underline{\Delta S_{BC} = n C_v \cdot \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{5}{2} \frac{p_0 V_0}{T_{\text{low}}} \cdot \ln 4}}}$$

(10)

$$\Delta S_{CA} = nC_v \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{T_{\text{h}}}{T_{\text{lav}}}\right)}_{=0} + nR \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right)$$

$$\underline{\underline{\Delta S_{CA}}} = nR \ln\left(\frac{V_0}{4V_0}\right) = -nR \ln 4 = -\underline{\underline{\frac{P_0 V_0}{T_{\text{lav}}} \cdot \ln 4}}$$

$$\Delta S_{\text{syklus}} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA}$$

$$\underline{\underline{\Delta S_{\text{syklus}}}} = \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{2} - 1\right) \frac{P_0 V_0}{T_{\text{lav}}} \cdot \ln 4 = \underline{\underline{0}} \quad \text{f.e.d.}$$

För en syklisk process är $\Delta S = 0$ för alla kompletta syklus, för att entropin S är en tillståndsvariabel för gasen.

Oppg 3

a) Sentral skive: $J_m = \frac{1}{2}MR^2$

Liten skive: $J_m = \frac{1}{2}mr^2 + m(2r)^2$ // Steiners sats

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{R}{3}\right)^2 + m\left(2\frac{R}{3}\right)^2$$

$$= mR^2\left(\frac{1}{18} + \frac{4}{9}\right) = mR^2\frac{1}{2}$$

$$J = J_m + 12J_m = \frac{1}{2}MR^2 + 12\frac{1}{2}mR^2$$

$$= \left(\frac{M}{2} + 6m\right)R^2$$

b) i) $\mu_2 = \mu_1 \Rightarrow \underline{h = h_0}$ - Fordi den mekaniske energien er bevart.

ii) $\mu_2 = 0 \Rightarrow$ Skiven bevarer rotasjonsenergien den har i bunnpunktet fordi dreiemomentet er null.

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2, \quad v = \omega r \text{ er hastighet i bunnen.}$$

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2 \Rightarrow \underline{v^2 = \frac{4}{3}gh_0}$$

Den kinetiske translasjonsenergien bestemmer den nye høyden:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

$$h = \frac{1}{2g}v^2 = \frac{1}{2g}\frac{4}{3}gh_0 = \underline{\underline{\frac{2}{3}h_0}}$$

Oppgave 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B	D	B	E	A	B	D	C	B	E