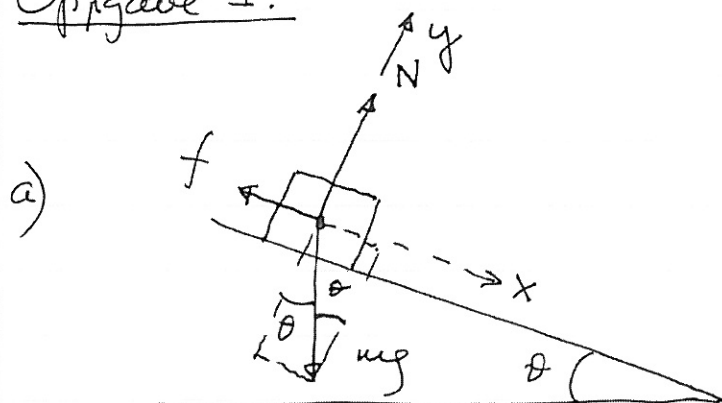


①

4125

Løsningsforslag. Eksamen TFY4102 9. juni 2016.

Oppgave 1.

Komponentvis analyse av kraftdiagrammet gir:

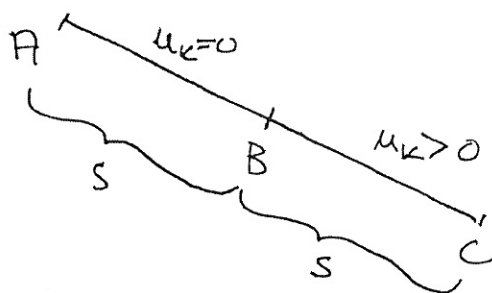
$$y\text{-retning} : N - mg \cos \theta = 0 \Rightarrow \underline{N = mg \cdot \cos \theta}$$

$$x\text{-retning} : mg \sin \theta - f = m a_x$$

$$\text{Friksjonskraften } f = \mu_k \cdot N = \mu_k \cdot mg \cdot \cos \theta.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a_x = \frac{1}{m} [mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta] = g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta) \text{ g.f.d.}}}$$

b)



$$v_A = 0$$

$$v_C = 0$$

(2)

På AB: $a_x = g \cdot \sin \theta$ för $\mu_k = 0$

på BC: $a_x = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$ $\mu_k > 0$.

Bräcker arbets-energi teoriet på sträckan AC.

$$W_{\text{total}} = W_{\text{friktion}} = \Delta E = E_C - E_A = K_C - K_A + U_C - U_A$$

$$K_A = K_C = 0 \quad U_A - U_C = 2 \cdot s \cdot \sin \theta \cdot \text{neg}$$

$$W_{\text{friktion}} = -f \cdot s \quad (\text{friktion bara på BC, inte på AB})$$

$$\Rightarrow -\mu_k \cdot \text{neg} \cos \theta \cdot s = 0 - 0 - 2s \cdot \sin \theta \cdot \text{neg}$$

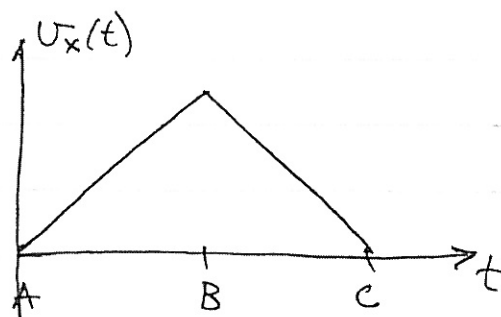
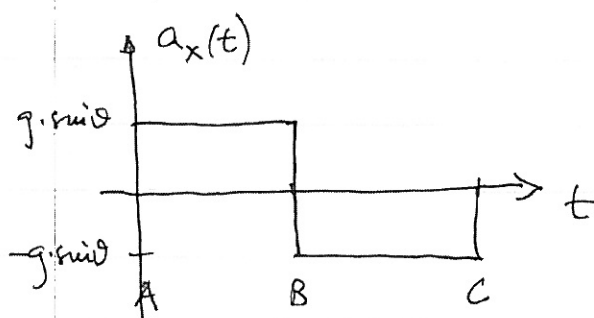
$$\Rightarrow \underline{\underline{\mu_k = \frac{2 \sin \theta}{\cos \theta} = 2 \cdot \tan \theta}}}$$

c) Med $\mu_k = 2 \cdot \tan \theta$ får vi:

På AB: $a_x = g \cdot \sin \theta = \text{konst.}$ $v_x(t) = v_A + \int a_x \cdot dt = 0 + (g \cdot \sin \theta) \cdot t$

på BC: $a_x = g(\sin \theta - 2 \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \cos \theta) = -g \cdot \sin \theta$; $v_x(t) = (-g \cdot \sin \theta) \cdot t$

Grafer:



d) $m = 2,0 \text{ kg}$, $L = 10,0 \text{ m}$, $s = 0,2 \text{ m}$, $\theta = 30^\circ$
 Omgivelsestemperatur $T = 20^\circ\text{C}$ (konstant).

i) Endring i kinetisk energi: $\Delta K = 0$

fordi hastigheten er null både i begynnelsen og slutten av bevegelsen, siden klossen går et like antall striper $N = \frac{L}{s} = \frac{10 \text{ m}}{0,2 \text{ m}} = 50$ og derfor til slutt stopper i enden av et firkantfelt.

ii) Endring i potensiell energi: $\Delta U = U_A - U_B$

$$\Delta U = mg(0 - L \cdot \sin \theta) = \underline{-mgh \sin \theta}$$

$$\underline{\Delta U} = -2,0 \text{ kg} \cdot 10,0 \text{ m} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 30^\circ = \underline{\underline{-98,1 \text{ J}}}$$

iii) Endring i mekanisk energi:

$$\underline{\Delta E} = \Delta(K+U) = \Delta K + \Delta U = \underline{-mgh \sin \theta} = \underline{\underline{-98,1 \text{ J}}}$$

iv) Endringen i entropi i universet er gitt ved at den utviklede frikvarvarmen $\Delta Q = |\Delta E|$ overføres til omgivelsene som har konstant temperatur $T = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$.

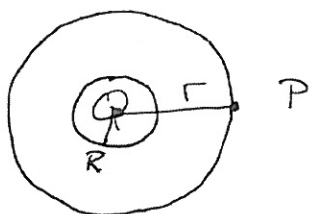
Det gir en entropiendring for universet:

$$\underline{\Delta S} = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{98,1 \text{ J}}{293 \text{ K}} = \underline{\underline{0,33 \text{ J/K}}}$$

Oppgave 2.

- a) Bruker Gauss lov til å bestemme feltet for to symmetriske systemer: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enclosed}}}{\epsilon_0}$

- i) Uniformt ladet kuleskall, med $r \geq R$. Totalladning Q .



Gaussflate som kuleflate gjennom Punkt P i avstand r fra kuleskallets sentrum.

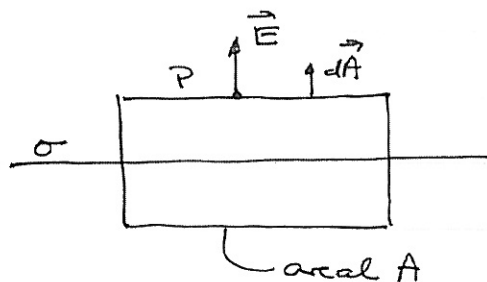
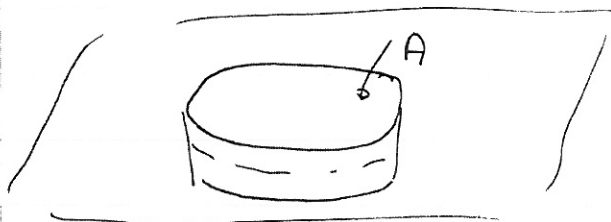
Av symmetrigrunner må feltet fra en kulesymmetrisk ladningsfordeling være radialt rett, og konstant for fast verdi av r .

På Gauss-flaten er derfor: $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ og $|\vec{E}|$ konstant

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint E dA = E \int dA = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{e}_r}} \quad r \geq R \quad \text{f.e.d.}$$

- ii) Ladet plate med ∞ utstrekning. Ladnings tetthet σ .



Velger symmetrisk Gaussflate med topp- og bunnflate parallell med det ladede planet.

5

Før et uniformt ladet plan ved av symmetigrunner
feltretningen være normalt på planet, og ha
konstant verdi for en bestemt avstand fra planet.

På sylinder sideflaten (av Gauss flaten) er $d\vec{A} \perp \vec{E}$,
slik at $\vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$.

På topp- og bunnflaten er $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ slik at
 $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot dA$. Deretter er $|\vec{E}|$ konstant.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \int_{\text{topflate}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\text{sideflate av sylinder}} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{\text{bunnflate}} \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ &= E \cdot A + 0 + E \cdot A = \frac{\sigma \cdot A}{\epsilon_0} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}}} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

b) Super periferisprinkippet kan brukes til å
beregne feltet i sentre av kulelt i kuleflate
som:

$$\vec{E}_{\text{sentre av kule}} = \vec{E}_{\text{hel kuleflate}} + \vec{E}_{\text{plagg}}$$

hvor plagg-flaten har motsatt like ladings tetthet

som det som finnes på kuleflaten,

$$\text{dvs } \underline{\underline{\sigma = -\frac{Q}{4\pi R^2}}}$$

(6)

I kullet vil $\hat{n}$ for pleggflaten være parallell med $\hat{e}_r$,
og vi regner at en plan flate kan representere
pleggflaten hvis pleggen har liten overflate.

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{kull}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{e}_r + \frac{1}{2} \left(-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \right) \hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{E}_{\text{kull}} = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2} \hat{e}_r \text{ for } r=R \text{ g.c.d.}}}$$

- c) Pleggen settes tilbake i kullet, og det virker
dermed en elektrostatiske kraft på pleggen.
Antar at pleggen har overflateareal A_p ,
og samme ladetetthet som kuleskallet forøvrig.
Elektrostatiske kraft på pleggen:

$$\underline{\underline{\vec{F} = q_{\text{plegg}} \cdot \vec{E}_{\text{kull}} = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot A_p \cdot \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2} \hat{e}_r}}$$

Kan regne at pleggen ~~er~~ er sirkulær, med radius a :

$$\underline{\underline{\vec{F} = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \pi a^2 \cdot \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2} \hat{e}_r = \frac{Q^2 a^2}{32\pi\epsilon_0 R^4} \hat{e}_r}}$$

"Elektrostatiske trykk" er $p = \frac{|\vec{F}|}{A_p}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{p = \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4}}}$$

(7)

- d) Arbejd gjort af den elektrostatiske kræfter ved udvidelse af kuleskallet (såpeboblen)
for $r=R=10\text{ cm}$ til $R=\infty$

$$W = \int_{r=R}^{\infty} p \cdot dV \quad \text{Kuglesymmetri giver at } dV = 4\pi r^2 dr$$

$$\Rightarrow W = \int_{r=R=0,1\text{ m}}^{\infty} \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{1}{r^2} dr$$

$$\underline{W} = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_R^{\infty} = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0} \left[-0 - \left(-\frac{1}{R}\right) \right] = \underline{\underline{\frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R}}}$$

$$\underline{W} = \frac{(3 \cdot 10^{-9} \text{ C})^2}{8 \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}} \cdot \frac{1}{0,1 \text{ m}} = 0,40 \cdot 10^{-6} \text{ Nm} = \underline{\underline{0,40 \mu\text{J}}}$$

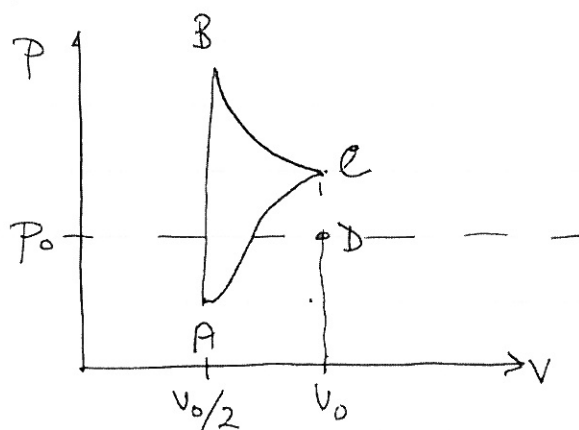
- e) Den elektrostatiske energien samlet til for n samle ladninger dq fra uendelig afstand til jern fordeling på et kuleskall med radius $r=R$, og såk at total ladningen blev Q , er:

$$U = \int_{q=0}^Q V(R, q) dq = \int_{q=0}^Q \frac{q}{4\pi \epsilon_0 R} dq = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R} \int_0^Q dq = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 R} \cdot \frac{1}{2} [q^2]_0^Q$$

$$\underline{\underline{U = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R} = W}}$$

Den elektrostatiske energien ved n samle ladningen på kuleskallet, tilsvare arbeidet som gøres når ladningen spres til uendelig afstand, hvilket var n forventede pga. energibevarelse.

Opgrave 3.



For punktet D kan vi pte:

$$P_0, V_0, T_0.$$

BC er ~~er~~ isotherm ($T_B = T_C$)

AB er isokor. ($V_A = V_B$)

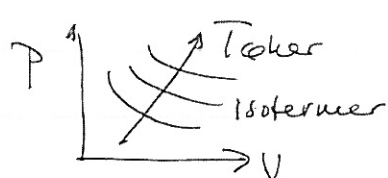
Procesligning AC:
$$P = P_0 \left[\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi V}{V_0}\right) + 1 \right]$$

For A:
$$P_A = P_0 \left[\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi \frac{V_0}{2}}{V_0}\right) + 1 \right] = P_0 \left[\frac{1}{2} \cos \pi + 1 \right] = P_0 \left[-\frac{1}{2} + 1 \right] = \underline{\underline{\frac{P_0}{2}}}$$

For C:
$$P_C = P_0 \left[\frac{1}{2} \cos\left(2\pi \frac{V_0}{V_0}\right) + 1 \right] = P_0 \left[\frac{1}{2} \cos 2\pi + 1 \right] = P_0 \left[\frac{1}{2} + 1 \right] = \underline{\underline{\frac{3P_0}{2}}}$$

- a) Bestemmer cyklens højeste og laveste temperatur, T_{varm} og T_{kold} .

Fra hvordan isotermer foreligger i et P-V diagram



ser vi at $T_{\text{varm}} = T_B = T_C$

$$\underline{\underline{T_{\text{kold}} = T_A.}}$$

Bruger tilstandsligninger for ideel gas på tilstandene A og D:

$$\frac{P_A \cdot V_A}{T_A} = \frac{P_D \cdot V_D}{T_D}$$

$$P_D = P_0, V_D = V_0, T_D = T_0, V_A = \frac{V_0}{2}, P_A = \frac{P_0}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T_A = \frac{P_A V_A}{P_D V_D} \cdot T_D = \frac{\frac{P_0}{2} \cdot \frac{V_0}{2}}{P_0 \cdot V_0} \cdot T_0 = \frac{1}{4} T_0 = T_{\text{kold}}}}$$

(9)

Tilstandsligning for tilstandene C og D:

$$\frac{p_C V_C}{T_C} = \frac{p_D V_D}{T_D}$$

$$\Rightarrow \underline{T_C} = \frac{p_C V_C}{p_D V_D} \cdot T_D = \frac{\frac{3}{2} p_0 V_0}{p_0 V_0} \cdot T_0 = \underline{\underline{\frac{3}{2} T_0 = T_{\text{varm}}}}$$

Virkningsgrad for Carnotprosessen:

$$\underline{\underline{e_{\text{Carnot}}}} = 1 - \frac{T_{\text{kald}}}{T_{\text{varm}}} = 1 - \frac{\frac{1}{4} T_0}{\frac{3}{2} T_0} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = \underline{\underline{0,83}}$$

b) Arbeid for hver av delprosessene:

$$\text{Isoterm BC: } W_{BC} = \int_B^C p \cdot dV = \int_B^C \frac{n R T_{\text{varm}}}{V} \cdot dV$$

$$W_{BC} = n R T_{\text{varm}} \left[\ln V \right]_B^C = n R T_{\text{varm}} \ln \left(\frac{V_C}{V_B} \right) = n R \cdot \frac{3}{2} T_0 \cdot \ln \left(\frac{V_0}{V_0/2} \right)$$

Berestemmer n fra tilstandsligningene brukt på punkt 1:

$$p_0 V_0 = n R T_0 \Rightarrow \underline{\underline{n = \frac{p_0 V_0}{R T_0}}}$$

$$\underline{\underline{W_{BC}}} = \frac{p_0 V_0}{R T_0} \cdot R \cdot \frac{3}{2} T_0 \cdot \ln 2 = \underline{\underline{\frac{3}{2} p_0 V_0 \cdot \ln 2}} \quad \left(\begin{array}{l} W_{BC} > 0, \text{ dvs} \\ \text{arbeid utført} \\ \text{av systemet} \end{array} \right)$$

$$\text{Trinn CA: } W_{CA} = \int_C^A p \cdot dV$$

Karakteren for p i prosessstrinnet CA er symmetrisk om

(10)

gjennomsnittsverdien $\bar{p} = p_0$

$$\Rightarrow \underline{W_{CA}} = \bar{p}(V_A - V_C) = p_0\left(\frac{V_0}{2} - V_0\right) = \underline{-\frac{1}{2}p_0V_0}$$

W_{CA} er arbeid utført på systemet, siden $W_{CA} < 0$.

Alternativt kunne vi regne ut

$$W_{CA} = \int_C^A p \cdot dV = \int_C^A p_0 \left[\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi V}{V_0}\right) + 1 \right] \cdot dV = p_0 \frac{1}{2} \sin\left[\frac{2\pi V}{V_0}\right] \Big|_{V_C}^{V_A} + p_0 \cdot V \Big|_{V_C}^{V_A}$$

$$= \frac{1}{2} p_0 \cdot \frac{V_0}{2\pi} \left[\sin\left(2\pi \frac{V_0/2}{V_0}\right) - \sin\left(2\pi \frac{V_0}{V_0}\right) \right] + p_0 \left[\frac{V_0}{2} - V_0 \right]$$

$$= \frac{1}{2} p_0 \frac{V_0}{2\pi} \left[\sin \pi - \sin 2\pi \right] + \left(-p_0 \frac{V_0}{2} \right)$$

$$\underline{W_{CA}} = \frac{1}{2} p_0 \frac{V_0}{2\pi} [0 - 0] - p_0 \frac{V_0}{2} = \underline{-\frac{1}{2} p_0 V_0}$$

Prosess AC er en isobar prosess $V_A = V_B \Rightarrow \underline{W_{AB} = 0}$

Totalarbeidet:

$$W_{\text{tot}} = W_{BC} + W_{CA} + W_{AC} = \frac{3}{2} p_0 V_0 \ln 2 - \frac{1}{2} p_0 V_0 + 0$$

$$\underline{W_{\text{tot}} = \left(\frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \right) p_0 V_0 > 0} \quad \therefore \text{netto arbeid utført av systemet}$$

c) Varmeroverføringen: heat input og for systemet

Termodynamikkens 1. lov: $Q = \Delta U + W$

desuden for ideell gas $\Delta U = nC_V \Delta T$

$$\text{For kretsprocess er } \Delta U = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Q_{net} = W_{net} = \frac{p_0 V_0}{2} (3 \ln 2 - 1)}}$$

BC er isoterm da $\Delta T = 0$ og $\Delta U = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Q_{BC} = W_{BC} = \frac{3}{2} p_0 V_0 \ln 2}}$$

$$Q_{CA} = \Delta U_{CA} + W_{CA} = nC_V [T_A - T_C] + \left(-\frac{1}{2} p_0 V_0\right)$$

$$Q_{CA} = \frac{p_0 V_0}{RT_0} \cdot \frac{3}{2} R \left[\frac{1}{4} T_0 - \frac{3}{2} T_0 \right] - \frac{1}{2} p_0 V_0 = p_0 V_0 \left[-\frac{15}{8} - \frac{1}{2} \right]$$

$$\underline{\underline{Q_{CA} = -\frac{19}{8} p_0 V_0}}$$

$$Q_{AB} = \Delta U + W_{AB} = nC_V (T_B - T_A) = \frac{p_0 V_0}{RT_0} \cdot \frac{3}{2} R \left(\frac{3}{2} T_0 - \frac{1}{4} T_0 \right)$$

$\downarrow = 0$

$$\underline{\underline{Q_{AB} = \frac{15}{8} p_0 V_0}}$$

$$Q_{TOT} = Q_{BC} + Q_{CA} + Q_{AB} = \frac{3}{2} p_0 V_0 \ln 2 - \frac{19}{8} p_0 V_0 + \frac{15}{8} p_0 V_0$$

$$\underline{\underline{Q_{TOT} = \left(\frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \right) p_0 V_0 = Q_{net} = W_{net} \quad \text{q.e.d.}}}$$

(12)

d) $\dot{Q}_{\text{varm}}$ er tilført varme (> 0) des.

$$\dot{Q}_{\text{varm}} = \dot{Q}_{BC} + \dot{Q}_{AB} = \frac{p_0 V_0}{2} \left(3 \ln 2 + \frac{15}{4} \right)$$

Varmekraftmaskinens virkningsgrad er:

$$\eta = \frac{\dot{W}_{\text{rot}}}{\dot{Q}_{\text{varm}}} = \frac{\frac{p_0 V_0}{2} (3 \ln 2 - 1)}{\frac{p_0 V_0}{2} \left(3 \ln 2 + \frac{15}{4} \right)} = \frac{2,08 - 1}{2,08 + 3,75} = \underline{\underline{0,18}}$$

① Oppgave 4:

Spørsmål	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Svar	C	E	C	E	D	B	C	D	C	A

(4102)
C B 4125