

NORGES TEKNISK-  
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET  
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:

Jon Andreas Støvneng

Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

EKSAMEN FY1002 BØLGEFYSIKK  
Mandag 10. desember 2007 kl. 0900 - 1300  
Norsk utgave

Hjelpemiddel: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjend kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidd av NTNU. (HP30S eller liknende.)

Side 2 - 6: Oppgavene

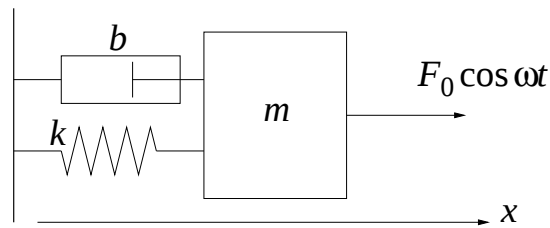
Side 7 - 15: Formelsamling

Prøva består av 6 oppgaver. Det er angitt hvor mye de ulike oppgavene i utgangspunktet vil telle under vurderinga. Vektorstørrelser angis med **feite** typer. Enhetsvektorer angis med hatt over symbolet.

Sensuren kommer når den er klar, seinest i begynnelsen av januar.

**OPPGAVE 1** [Teller 20%]

En masse  $m$  er festet til ei fjær med fjærkonstant  $k$ . Dempingskraften er proporsjonal med hastigheten,  $-b\dot{x}$ . En ytre kraft  $F_0 \cos \omega t$  sørger for at massen svinger fram og tilbake med vinkelfrekvens  $\omega$ .



- Vis at massens bevegelse er bestemt av ligningen

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos \omega t,$$

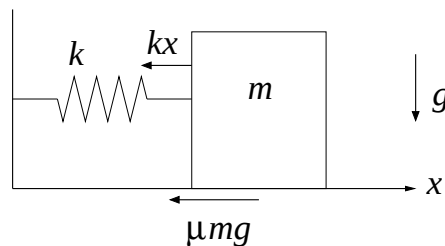
og bestem derved  $\delta$ ,  $\omega_0$  og  $A_0$ . Her er  $x$  massens utsving i forhold til likevektsposisjonen  $x = 0$ .

- Løsningen av denne ligningen oppgis å være på formen

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Bestem fasekonstanten  $\phi$  og skisser denne som funksjon av vinkelfrekvensen  $\omega$ , i det du antar svak demping, dvs  $\delta \ll \omega_0$ . Oppgitt:  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ ,  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ .

Den hastighetsavhengige dempekraften erstattes nå med ordinær friksjon mot et underlag med friksjonskoeffisient  $\mu$  (som er like stor statisk og dynamisk), slik at det hele tiden virker en friksjonskraft  $\mu mg$ , motsatt rettet massens bevegelse. Her er  $g$  tyngdens akselerasjon. (Ligger massen i ro, er friksjonskraften *inntil*  $\mu mg$ , motsatt rettet øvrige krefter som forsøker å sette massen i bevegelse.) Vi skrur dessuten av den ytre kraften og studerer fri svingninger. Figuren viser eksempelvis situasjonen med  $x > 0$  og  $\dot{x} > 0$ .



Posisjonen  $x = 0$  for massen tilsvarer at fjæra verken er strukket eller presset sammen. Ved tidspunktet  $t = 0$  trekkes massen mot høyre, til posisjonen  $x(0) = 2.5\mu mg/k$ , og slippes uten starthastighet.

- Vis at massens bevegelse beskrives av ligningen(e)

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0$$

der vi har innført  $\xi = x \pm \mu mg/k$ , og der fortegnet avhenger av om massen beveger seg mot høyre eller venstre. Hva blir vinkelfrekvensen  $\omega$ ?

- Hvor mye energi går tapt, på grunn av friksjon, i løpet av bevegelsens første halve periode, dvs fra  $t = 0$  til  $t = T/2 = \pi/\omega$ ? Hvor mye energi går tapt mellom  $t = T/2$  og  $t = T$ ?

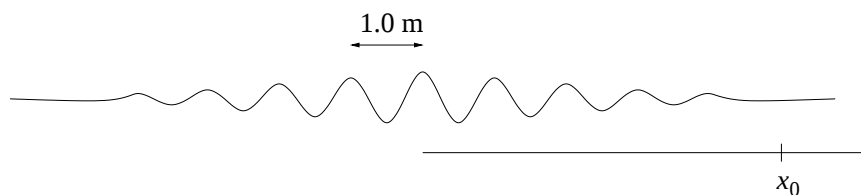
## OPPGAVE 2 [Teller 15%]

I denne oppgaven ser vi på tyngdebølger i grenseflaten mellom luft og vann. Disse oppfyller dispersjonsrelasjonen

$$\omega(k) = \sqrt{gk \tanh(kd)}$$

Her er  $k$  bølgetallet,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  tyngdens akselerasjon og  $d$  vannets dybde. Anta at  $d = 25 \text{ cm}$ .

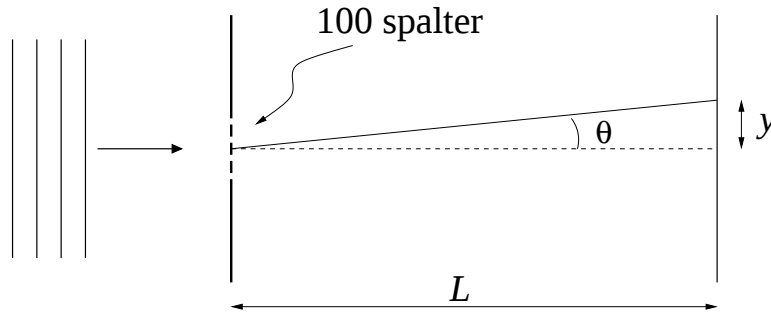
- Bestem perioden til bølger med bølgelengde  $\lambda = 0.5 \text{ m}$ .
- Bestem bølgelengden til bølger med fasehastighet  $v_f = 0.5 \text{ m/s}$ .
- En bølgepakke har 9 tydelige bølgetopper og bølgelengde  $1.0 \text{ m}$ . Vi antar at bølgepakkens totale utstrekning tilsvarer  $8.5$  bølgelengder, dvs  $8.5 \text{ m}$ , og at denne ikke endrer seg nevneverdig mens vi foretar våre observasjoner. Figuren viser et øyeblikksbilde av bølgepakken:



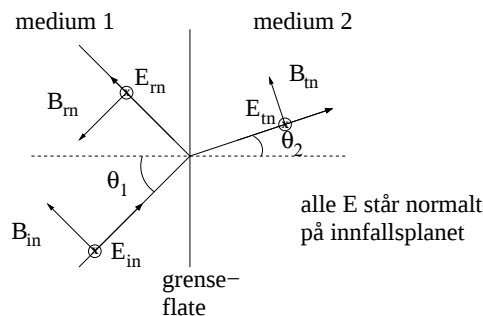
Vi retter nå øynene mot en fast posisjon  $x_0$  og følger nøye med mens bølgepakken passerer. Hvor lang tid bruker bølgepakken på å passere  $x_0$ ? Hvor mange bølgetopper ser vi passere  $x_0$ ? Begrunn svaret. (Kommentar: En slik romlig avgrenset bølgepakke må strengt tatt "inneholde" flere bølgelengder enn den ene på  $1.0 \text{ m}$  som det her er snakk om. Opplysningen om at bølgepakkens utstrekning ikke endrer seg, er imidlertid tilstrekkelig for å besvare spørsmålene.) Oppgitt:  $d(\tanh x)/dx = 1/\cosh^2 x$ .

**OPPGAVE 3** [Teller 15%]

Monokromatisk laserlys med bølgelengde  $\lambda$  faller normalt inn mot et diffraksjonsgitter med  $N = 100$  spalter. Hver spalte har bredde  $a$ , og senter-til-senter avstanden mellom spaltene er  $d = 8a$ . Lyset som passerer gjennom spaltene, treffer en skjerm som er plassert i avstand  $L$  fra spalteåpningene, og resulterer i en intensitetsfordeling  $I(y)$ . I figuren er spaltenes lengderetning normalt på papirplanet:



- Innfør den dimensjonsløse størrelsen  $\phi = \pi d \sin \theta / \lambda$  og skriv ned et uttrykk for intensitetsfordelingen  $I(\phi)$ . I dette uttrykket skal bare  $\phi$  gjenstå som variabel parameter, i tillegg til prefaktoren  $I_0$ , som angir  $1/N^2$  av intensiteten til 0. ordens hovedmaksimum, dvs  $I_0 = I(\phi = 0)/N^2$ .
- Når  $\phi$  (og dermed  $\theta$  og  $y$ ) økes fra verdien 0, går  $I(\phi)$  gjennom diverse nullpunkter og såkalte sekundære maksima. I det første sekundære maksimum har intensiteten allerede falt til ca  $1/22$  av  $I(0)$ . Ved hvilken verdi av  $\phi$  finner du fjerde sekundære maksimum? Hvor stor er intensiteten til fjerde sekundære maksimum (i forhold til  $I(0)$ )?
- Når  $\phi$  har blitt så stor at vi har passert 99 nullpunkter, kommer vi til 1. ordens hovedmaksimum, som har intensitet  $0.95I(0)$ . Bestem intensiteten til 4. ordens hovedmaksimum (i forhold til  $I(0)$ ).

**OPPGAVE 4** [Teller 20%]

En monokromatisk plan elektromagnetisk bølge faller inn mot en plan grenseflate mellom luft (medium 1) og et magnetisk og dielektrisk medium (medium 2), se figuren ovenfor. Brytningsindeksen i luft er 1. Brytningsindeksen i medium 2 er  $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ , der  $\epsilon_r$  er relativ permittivitet og  $\mu_r$  er relativ permeabilitet.

Dersom bølgen er polarisert normalt på innfallsplanet, vil sammenhengen mellom amplituden til reflektert bølge,  $E_{rn0}$ , og amplituden til innkommende bølge,  $E_{in0}$ , være gitt ved

$$E_{rn0} = \frac{\alpha \cos \theta_1 - \cos \theta_2}{\alpha \cos \theta_1 + \cos \theta_2} E_{in0}$$

der  $\alpha \equiv \sqrt{\mu_r/\epsilon_r}$ .

- Den innkommende bølgen blir fullstendig transmittert dersom innfallsvinkelen  $\theta_1$  sammenfaller med Brewsters vinkel  $\theta_B$ . Vis at Brewsters vinkel er gitt ved

$$\sin \theta_B = \sqrt{\frac{n^2(\alpha^2 - 1)}{n^2\alpha^2 - 1}}$$

- Anta at medium 2 har relativ permittivitet  $\epsilon_r = 1.8$ . Hva slags verdier er da aktuelle for mediets relative permeabilitet  $\mu_r$  dersom Brewsters vinkel  $\theta_B$  skal ligge mellom 0 og 90 grader for den valgte polarisasjonsretningen? (Vi antar at  $n > 1$ .)

- Hittil i denne oppgaven har vi sett på fullstendig transmisjon. La oss nå diskutere mulighetene for å oppnå *total refleksjon* i grenseflaten mellom luft (medium 1) og et medium med brytningsindeks  $n > 1$  (medium 2). Bruk Snells brytningslov til å finne et kriterium for innfallsvinkelen  $\theta_i$  som resulterer i total refleksjon. Avgjør om en innfallsvinkel på 35 grader gir total refleksjon dersom  $n = 1.8$ , både for tilfellet at innkommende bølge befinner seg i luft (medium 1) og for tilfellet at innkommende bølge befinner seg i mediet med  $n = 1.8$  (medium 2).

## OPPGAVE 5 [Teller 10%]

Vis at for en elektromagnetisk bølge i vakuum, med

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

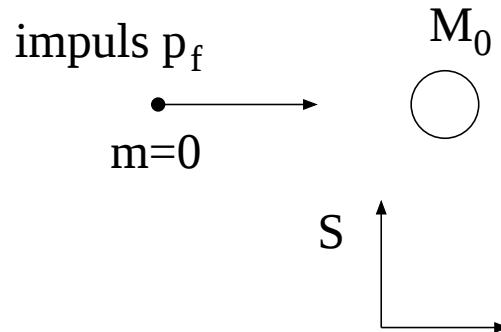
og

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

gjelder  $B_0 = E_0/c$ . Tips: Maxwells ligninger.

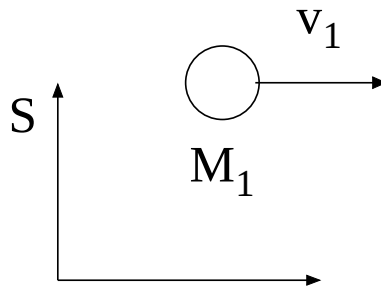
**OPPGAVE 6** [Teller 20%]

En kuleformet masse  $M_0$  ligger i ro i labsystemet S. En masseløs partikkel ( $m = 0$ ) (et foton) kommer inn fra venstre med impuls  $p_f$ .



- Bruk sammenhengene mellom (relativistisk) energi, impuls og masse til å argumentere for at fotonet *må* ha hastighet  $c$ , dvs lysets hastighet.
- Skriv ned fotonets energi  $E_f$ , den kuleformede massens energi  $E_m$ , og systemets totale energi  $E_0$  i S. (Med "systemet" menes her fotonet og den kuleformede massen.) Skriv også ned total impuls  $p_0$  i S.

Fotonet og den kuleformede massen kolliderer fullstendig uelastisk, slik at fotonet absorberes. Etter kollisjonen består følgelig systemet kun av en masse  $M_1$  som beveger seg mot høyre med hastighet  $v_1$ .



- Bruk prinsippene om impuls- og energibevarelse til å bestemme  $v_1$  og  $M_1$ . Finn tilnærmede uttrykk for  $v_1$  og  $M_1$  som gjelder dersom fotonets energi  $E_f$  er meget liten i forhold til den kuleformede massens energi  $E_m$ . Er uttrykkene som forventet?
- Anta at massen etter kollisjonen fortsatt er kuleformet i sitt eget hvilesystem (dvs der den er i ro). Hva slags form har den da i S? Begrunn svaret.

# Formelsamling

**Fete** symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Harmonisk plan bølge:

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$$

- Bølgeligning:

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \xi(\mathbf{r}, t) \left( \equiv \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$$

- Fasehastighet:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

- Gruppehastighet:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- Generelt for ikkedispersive udempede bølger:

$$v = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}}$$

- Generelt for lineær respons i elastiske medier:

$$\text{mekanisk spenning} = \text{elastisk modul} \times \text{relativ tøyning}$$

- For transversale bølger på streng:

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

- For longitudinale bølger i fluider:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

- For longitudinale bølger i faste stoffer:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- Middelverdi av harmonisk varierende størrelse  $A(x, t)$ , midlet over bølgelengde  $\lambda$ :

$$\overline{A} = \frac{\int_0^\lambda A(x, t) dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda A(x, t) dx$$

Middelverdi av harmonisk varierende størrelse  $A(x, t)$ , midlet over periode  $T$ :

$$\langle A \rangle = \frac{\int_0^T A(x, t) dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T} \int_0^T A(x, t) dt$$

- Midlere energi pr lengdeenhet for harmonisk bølge på streng:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 \xi_0^2$$

- Midlere energi pr volumenhet for harmonisk plan bølge:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2$$

- Midlere effekt transportert med harmonisk bølge på streng:

$$\overline{P} = v \overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} v \mu \omega^2 \xi_0^2$$

- Intensitet i harmonisk plan bølge:

$$I = v \overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} v \rho \omega^2 \xi_0^2$$

- Midlere impulstetthet for harmonisk bølge:

$$\overline{\pi} = \frac{\overline{\varepsilon}}{v}$$

- Ideell gass:

$$pV = Nk_B T$$

- Varmekapasitet ved konstant trykk ( $Q = \text{varme}$ ):

$$C_p = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_p$$

- Varmekapasitet ved konstant volum ( $Q = \text{varme}$ ):

$$C_V = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_V$$

- Adiabatiske forhold (dvs ingen varmetveksling):

$$pV^\gamma = \text{konstant}$$

- Adiabatkonstanten:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

Gass med 1-atomige molekyler:  $\gamma = 5/3$ . Gass med 2-atomige molekyler:  $\gamma = 7/5$ .

- Bulkmodul for ideell gass ved adiabatiske forhold:

$$B = \gamma p$$

- Lydhastighet i gass ( $m$  = molekylmassen):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

- Lydtrykk:

$$\Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- Lydnivå:

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

med  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

- Dopplereffekt:

$$\nu_O = \frac{1 - v_O/v}{1 - v_S/v} \nu_S$$

- For sjokkbølger:

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_S}$$

- Transversal bølge på streng med massetetthet  $\mu_1$  for  $x < 0$  og  $\mu_2$  for  $x > 0$ , innkommende bølge propagerer i positiv  $x$ -retning:

Amplitude for reflektert bølge:

$$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} y_{i0}$$

Amplitude for transmittert bølge:

$$y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} y_{i0}$$

Refleksjonskoeffisient:

$$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$

Transmisjonskoeffisient:

$$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Plan lydbølge normalt inn mot grenseflate i  $x = 0$  mellom to medier med elastiske moduler og massetettheter henholdsvis  $E_1$ ,  $\rho_1$  (for  $x < 0$ ) og  $E_2$ ,  $\rho_2$  (for  $x > 0$ ), innkommende bølge propagerer i positiv  $x$ -retning:

Amplitude for reflektert bølge:

$$\xi_{r0} = \frac{\sqrt{\rho_2 E_2} - \sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}} \xi_{i0}$$

Amplitude for transmittert bølge:

$$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}} \xi_{i0}$$

Refleksjonskoeffisient:

$$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$

Transmisjonskoeffisient:

$$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Maxwells ligninger på integralform:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

- Maxwells ligninger på differensialform:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- Lorentzkraften:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Bølgeligning for  $\mathbf{E}$  og  $\mathbf{B}$  i vakuum:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

- Intensitet i elektromagnetisk bølge:

$$I = c\varepsilon_0 \overline{E^2} = c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

- Poyntings vektor:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

- Impuls i elektromagnetisk bølge:

$$\boldsymbol{\pi} = \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{S}$$

- Elektrisk dipolmoment:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\mathbf{m} = I\mathbf{A}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende elektrisk dipol  $p_0 \cos(\omega t)$ :

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \varepsilon_0 c^3}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende magnetisk dipol  $m_0 \cos(\omega t)$ :

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

- Malus' lov:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta$$

- Lineære medier:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

- Maxwells ligninger etc:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = q_{\text{fri}}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{fri}} + \frac{d}{dt} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{fri}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{fri}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

- Energitetthet, Poyntings vektor:

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

- For elektromagnetiske bølger i medier ( $q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$ ):

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{B} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \\ v &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n}\end{aligned}$$

- Grenseflatebetingelser ( $q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$  i grenseflaten):

$$\begin{aligned}\Delta D_{\perp} &= 0 \\ \Delta E_{\parallel} &= 0 \\ \Delta B_{\perp} &= 0 \\ \Delta H_{\parallel} &= 0\end{aligned}$$

- Refleksjon og brytning:

$$\begin{aligned}\theta_r &= \theta_i \\ n_1 \sin \theta_i &= n_2 \sin \theta_t\end{aligned}$$

- Youngs eksperiment med to smale spalter:

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)$$

- Diffraksjonsgitter med  $N$  smale spalter:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{N\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}{\sin^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}$$

- Diffraksjon fra en spalte:

$$I(\theta) = I(0) \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)}{\left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)^2}$$

- Diffraksjon fra  $N$  spalter med bredde  $a$ :

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)}{\left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)^2} \frac{\sin^2 \left( \frac{N\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}{\sin^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Lorentztransformasjonene ( $\bar{S}$  har hastighet  $\mathbf{v} = v\hat{x}$  i forhold til  $S$ ):

$$\bar{x} = \gamma(x - vt)$$

$$\bar{y} = y$$

$$\bar{z} = z$$

$$\bar{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t})$$

$$y = \bar{y}$$

$$z = \bar{z}$$

$$t = \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right)$$

- Tidsdilatasjon:

$$\Delta t = \gamma\Delta\bar{t}$$

- Lengdekontraksjon:

$$\Delta\bar{x} = \gamma\Delta x$$

- Hastighet i  $S$  ( $\mathbf{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$ ):

$$u_x = dx/dt$$

$$u_y = dy/dt$$

$$u_z = dz/dt$$

Hastighet i  $\bar{S}$  ( $\bar{\mathbf{u}} = \bar{u}_x\hat{x} + \bar{u}_y\hat{y} + \bar{u}_z\hat{z}$ ):

$$\bar{u}_x = d\bar{x}/d\bar{t}$$

$$\bar{u}_y = d\bar{y}/d\bar{t}$$

$$\bar{u}_z = d\bar{z}/d\bar{t}$$

- Addisjon av hastigheter (alle hastigheter i samme retning):

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

- Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:

$$\bar{\nu} = \nu \left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2}$$

- Relativistisk impuls:

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$$

- Newtons 2. lov:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

- Energi:

$$E = \gamma mc^2$$

$$E_0 = mc^2$$

$$E_k = E - E_0$$

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

- Elastisk prosess:  $E$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $E_k$  og  $m$  bevart.
- Uelastisk prosess:  $E$  og  $\mathbf{p}$  bevart.