

NORGES TEKNISK-  
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET  
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:

Jon Andreas Støvneng

Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

EKSAMEN FY1002 og TFY4160 BØLGEFYSIKK  
Fredag 3. desember 2010 kl. 0900 - 1300  
Bokmål

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU. (Citizen SR-270X eller HP30S.)

Side 2 – 6: Oppgaver

Side 7 – 15: Formelsamling

Side 16: God jul!

Prøven består av 6 oppgaver, i alt 10 deloppgaver. Hver deloppgave vil i utgangspunktet telle like mye (8 %) på sluttkarakteren. Hele denne prøven teller 80 % på sluttkarakteren. De resterende 20 % utgjøres av midtsemesterprøven som ble avholdt tidligere i høst.

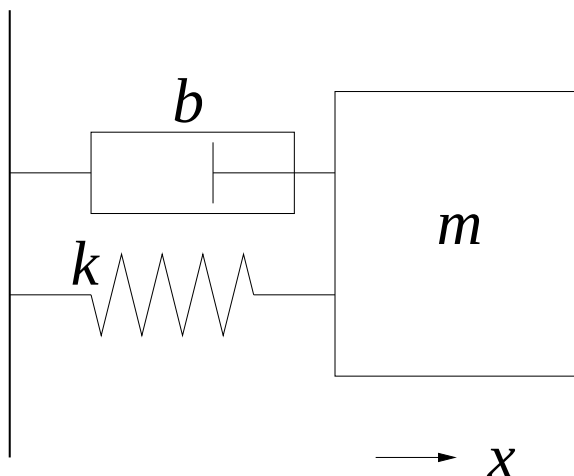
Sensuren kommer senest 3. januar 2011.

Noen Taylorutviklinger (for  $x \ll 1$ , til orden  $x^3$ ):

$$\begin{aligned}e^{-x} &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \dots \\ \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 \dots \\ (1+x)^{-1/2} &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 \dots\end{aligned}$$

**OPPGAVE 1** [teller 16 %]

Figuren viser et dempet svingesystem. En masse  $m$  er festet til ei ideell fjær med fjærkonstant  $k$ . Svingningene dempes av en kraft  $-b\dot{x}$ , dvs proporsjonal med massens hastighet. ( $b$  er en dempningskonstant.)

**a**

- Skriv ned bevegelsesligningen for dette svingesystemet. (Dvs: Differensialligningen for massens utsving  $x$  fra likevektsposisjonen  $x = 0$ .)

Massens utsving er gitt ved

$$x(t) = x_0 e^{-t/\tau} \cos \omega t,$$

der vi antar *svak* dempning.

- Hva blir den "karakteristiske dempningstiden"  $\tau$ ?
- Hva blir vinkelfrekvensen  $\omega$ ?

Tips: Velg selv om du vil skrive ned  $\tau$  og  $\omega$ , eller regne ut disse størrelsene med utgangspunkt i bevegelsesligningen.

**b**

- Anta at dempningen er meget svak,  $\omega\tau \gg 1$ . Regn ut systemets  $Q$ -verdi (evt "godhetsfaktor"), definert ved

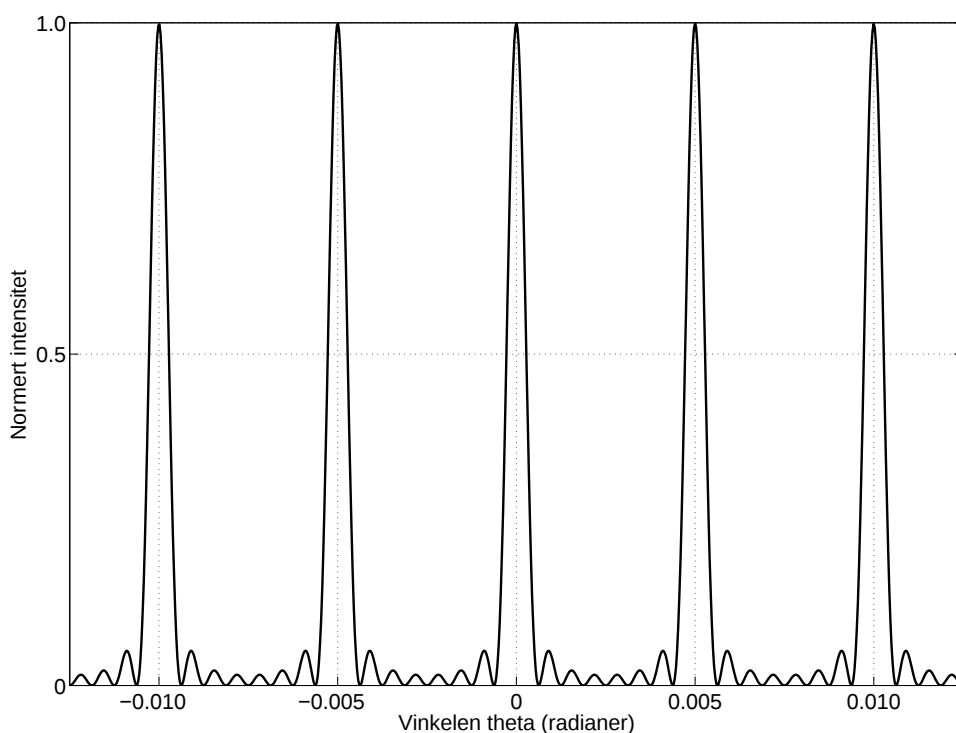
$$Q \equiv 2\pi \left( \frac{\Delta E}{E} \right)^{-1},$$

der  $\Delta E/E = [E(t) - E(t + T)]/E(t)$  er relativt energitap pr periode  $T$ .

**OPPGAVE 2** [teller 8 %]

I en ideell gass bestående av enkeltatomer ("en-atomige molekyler") er lydhastigheten ved en viss temperatur  $v_0$ . Gassen utvider seg under adiabatisk forhold (dvs uten varmeutveksling med omgivelsene) slik at trykket halveres.

- Hva blir nå lydhastigheten i gassen?

**OPPGAVE 3** [teller 8 %]

Figuren over viser (normert) intensitetsfordeling  $I(\theta)$  for laserlys som har passert gjennom  $N$  meget smale parallelle spalter med spalteavstand  $d$ . Laserens bølgelengde er  $\lambda = 500$  nm.

- Bruk figuren til å bestemme  $N$  og  $d$ .

I figuren over er spaltebredden  $a = d/100$ .

- Vis, ved å skissere  $I(\theta)$  i området  $-0.05 < \theta < 0.05$  (radianer), hvordan intensitetsfordelingen blir dersom spaltebredden økes til  $a = d/5$ . (Bruk også her en normert intensitet, med  $I(0) = 1$ .)

#### OPPGAVE 4 [teller 16%]

I denne oppgaven ser vi på overflatebølger på dypt vann. Disse oppfyller dispersjonsrelasjonen

$$\omega(k) = \sqrt{gk + \gamma k^3 / \rho}.$$

Her er  $k$  bølgetallet,  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  tyngdens akselerasjon,  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$  vannets massetetthet og  $\gamma = 0.073 \text{ N/m}$  vannets overflatespenning.

##### a

- Bestem den "karakteristiske bølgelengden"  $\lambda_0$  når tyngdeleddet og overflatespenningsleddet bidrar i like stor grad i dispersjonsrelasjonen.

En kort bølgepakke, med essensielt bare en bølgetopp, dannes i det en båt kjører forbi ca 50 m fra land. Vannet er ellers blikk stille slik at du tydelig kan følge bølgene på vei inn mot land. Anta at bølgepakken er en superposisjon av harmoniske bølger, med bølgelengder i området 0.2 til 2.0 m.

- Hvor lang tid bruker de raskeste harmoniske bølgene (evt "fourierkomponentene") fra de genereres ved båten til de slår mot land?

- Enn de langsomste?

(Sjøen er brådyp, så dispersjonsrelasjonen gitt ovenfor gjelder overalt. Og vi antar at bølgene beveger seg rett inn mot land.)

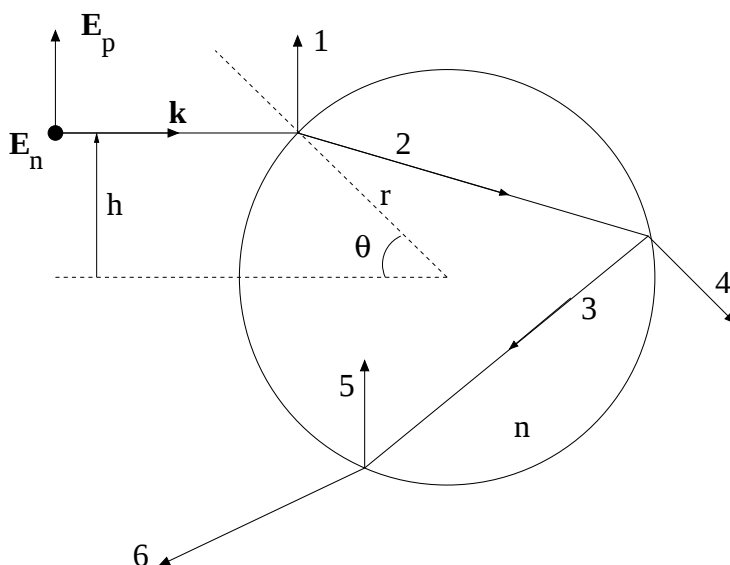
##### b

Bølgepakker med gruppehastighet  $v_g = 1.0 \text{ m/s}$  har enten en meget kort bølgelengde  $\lambda_1$  eller en forholdsvis lang bølgelengde  $\lambda_2$ .

- Regn ut  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$ .

**OPPGAVE 5** [teller 16 %]

Figuren nedenfor viser mulige ”baner” (1 - 6) for en lysstråle som treffer ei dielektrisk skive (eventuelt ekvatorialplanet til ei dielektrisk kule) med radius  $r$  og brytningsindeks  $n$  i høyde  $h$  over senterlinjen. Det innkommende lyset kan betraktes som en superposisjon av bølger med elektriske feltvektorer  $\mathbf{E}_p$  og  $\mathbf{E}_n$  henholdsvis parallelt med og normalt på innfallsplanet. Det omgivende mediet er luft, med brytningsindeks lik 1.



Anta heretter at lysstrålen treffer skiva i en bestemt høyde  $h_B$  fra senterlinjen, slik at sammenhengen  $\alpha = \beta$  er oppfylt i uttrykkene for refleksjonskoeffisientene  $R_p$  og  $R_n$  oppgitt nedenfor. Anta at  $\alpha\beta \neq 1$ .

**a** • Finn  $h_B$  uttrykt ved skivas radius  $r$  og dens brytningsindeks  $n$ .

**b** • Angi for hver av de seks ”banene” 1 - 6 i figuren om strålen er polarisert parallelt med ( $p$ ) eller normalt på ( $n$ ) innfallsplanet, eller om strålen er en superposisjon av disse to ( $p + n$ ). [Merk at denne deloppgaven i stor grad kan besvares selv om du ikke har fått til oppgave a.]

Oppgitt:

Refleksjonskoeffisienter for skrått innfall mot grenseflate mellom to medier ( $R_p$  for polarisasjon parallelt med innfallsplanet,  $R_n$  for polarisasjon normalt på innfallsplanet):

$$R_p = \left( \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2, \quad R_n = \left( \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \right)^2$$

med

$$\alpha \equiv \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}, \quad \beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2}.$$

Her er  $\theta_1$  og  $\theta_2$  henholdsvis innfalls- og brytningsvinkel (evt omvendt),  $v_1$  og  $v_2$  er lyshastigheter i medium 1 og 2, og  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$  (= vakuumpermeabiliteten) for umagnetiske medier, noe som kan antas her.

## OPPGAVE 6 [teller 16 %]

### a

- Skriv ned uttrykkene for kinetisk energi  $T$  for en partikkel med masse  $m$  og hastighet  $v$ , både ifølge Newton ( $T_{\text{Newton}}$ ) og Einstein ( $T_{\text{Einstein}}$ ) (dvs ifølge henholdsvis ikke-relativistisk og relativistisk mekanikk).
- Vis at Einstein er enig med Newton, dvs  $T_{\text{Einstein}} \simeq T_{\text{Newton}}$ , dersom partikkelens hastighet  $v$  er mye mindre enn lyshastigheten  $c$ .
- Bestem korreksjonen til det ikke-relativistiske uttrykket i form av en polynomutvikling (Taylorutvikling) i hastighetsforholdet  $\beta \equiv v/c$ , dvs bestem  $a_1$  og  $a_2$  i

$$T_{\text{Einstein}} = T_{\text{Newton}} \left( 1 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \dots \right).$$

### b

To elektroner, hver med masse  $m$ , beveger seg rett mot hverandre og kolliderer. Målt i lab-systemet har de to elektronene like stor kinetisk energi  $T$ .

- Hvor stor er *relativ* kinetisk energi  $\tilde{T}$ ? (Dvs: Kinetisk energi målt i et inertialsystem der et av elektronene er i ro.)
- Vurder om resultatet er som forventet i den ikke-relativistiske grensen  $T \ll mc^2$ .

Anta at du skal gjennomføre et eksperiment som krever at de kolliderende elektronene har relativ kinetisk energi  $\tilde{T} = 1000 \text{ GeV}$  ( $= 10^{12} \text{ eV}$ ).

- Hvor mye er det da å spare på å akselerere begge elektronene (i motsatt retning!) framfor å akselerere kun det ene elektronet?

Oppgitt: Elektronets masse er  $m \simeq 0.5 \text{ MeV}/c^2$ .

# Formelsamling

**Fete** symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Harmonisk plan bølge:

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \xi_0 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi)$$

- Bølgeligning:

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \xi(\mathbf{r}, t) \left( \equiv \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}$$

- Fasehastighet:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

- Gruppehastighet:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- Generelt for ikkedispersive udempede bølger:

$$v = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}}$$

- Generelt for lineær respons i elastiske medier:

$$\text{mekanisk spenning} = \text{elastisk modul} \times \text{relativ tøyning}$$

- For transversale bølger på streng:

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

- For longitudinale bølger i fluider:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

- For longitudinale bølger i faste stoffer:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- Middelverdi av harmonisk varierende størrelse  $A(x, t)$ , midlet over bølgelengde  $\lambda$ :

$$\overline{A} = \frac{\int_0^\lambda A(x, t) dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda A(x, t) dx$$

Middelverdi av harmonisk varierende størrelse  $A(x, t)$ , midlet over periode  $T$ :

$$\langle A \rangle = \frac{\int_0^T A(x, t) dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T} \int_0^T A(x, t) dt$$

- Midlere energi pr lengdeenhet for harmonisk bølge på streng:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 \xi_0^2$$

- Midlere energi pr volumenhet for harmonisk plan bølge:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2$$

- Midlere effekt transportert med harmonisk bølge på streng:

$$\overline{P} = v \overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} v \mu \omega^2 \xi_0^2$$

- Intensitet i harmonisk plan bølge:

$$I = v \overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} v \rho \omega^2 \xi_0^2$$

- Midlere impulstetthet for harmonisk bølge:

$$\overline{\pi} = \frac{\overline{\varepsilon}}{v}$$

- Ideell gass:

$$pV = Nk_B T$$

- Varmekapasitet ved konstant trykk ( $Q = \text{varme}$ ):

$$C_p = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_p$$

- Varmekapasitet ved konstant volum ( $Q = \text{varme}$ ):

$$C_V = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_V$$

- Adiabatiske forhold (dvs ingen varmetveksling):

$$pV^\gamma = \text{konstant}$$

- Adiabatkonstanten:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Gass med 1-atomige molekyler:  $\gamma = 5/3$ . Gass med 2-atomige molekyler:  $\gamma = 7/5$ .

- Bulkmodul for ideell gass ved adiabatiske forhold:

$$B = \gamma p$$

- Lydhastighet i gass ( $m$  = molekylmassen):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

- Lydtrykk:

$$\Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- Lydnivå:

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

med  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

- Dopplereffekt for lydbølger:

$$\nu_O = \frac{1 - v_O/v}{1 - v_S/v} \nu_S$$

- For sjokkbølger gjelder:

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_S}$$

- Transversal bølge på streng med massetetthet  $\mu_1$  for  $x < 0$  og  $\mu_2$  for  $x > 0$ , innkommende bølge propagerer i positiv  $x$ -retning:

Amplitude for reflektert bølge:

$$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} y_{i0}$$

Amplitude for transmittert bølge:

$$y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} y_{i0}$$

Refleksjonskoeffisient:

$$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$

Transmisjonskoeffisient:

$$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Plan lydbølge normalt inn mot grenseflate i  $x = 0$  mellom to medier med elastiske moduler og massetettheter henholdsvis  $E_1$ ,  $\rho_1$  (for  $x < 0$ ) og  $E_2$ ,  $\rho_2$  (for  $x > 0$ ), innkommende bølge propagerer i positiv  $x$ -retning:

Amplitude for reflektert bølge:

$$\xi_{r0} = \frac{\sqrt{\rho_2 E_2} - \sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}} \xi_{i0}$$

Amplitude for transmittert bølge:

$$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}} \xi_{i0}$$

Refleksjonskoeffisient:

$$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$

Transmisjonskoeffisient:

$$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Maxwells ligninger på integralform:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

- Maxwells ligninger på differensialform:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- Lorentzkraften:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

- Bølgeligning for  $\mathbf{E}$  og  $\mathbf{B}$  i vakuum:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

- Intensitet i elektromagnetisk bølge:

$$I = c\varepsilon_0 \overline{E^2} = c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

- Poyntings vektor:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

- Impuls i elektromagnetisk bølge:

$$\boldsymbol{\pi} = \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{S}$$

- Elektrisk dipolmoment:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\mathbf{m} = I\mathbf{A}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende elektrisk dipol  $p_0 \cos(\omega t)$ :

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi \varepsilon_0 c^3}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende magnetisk dipol  $m_0 \cos(\omega t)$ :

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

- Malus' lov:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2 \theta$$

- Lineære medier:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = q_{\text{fri}}$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{fri}} + \frac{d}{dt} \int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{fri}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{\text{fri}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

- For elektromagnetiske bølger i medier ( $q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$ ):

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{B} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \\ v &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n}\end{aligned}$$

- Grenseflatebetingelser ( $q_{\text{fri}} = I_{\text{fri}} = 0$  i grenseflaten):

$$\begin{aligned}\Delta D_{\perp} &= 0 \\ \Delta E_{\parallel} &= 0 \\ \Delta B_{\perp} &= 0 \\ \Delta H_{\parallel} &= 0\end{aligned}$$

- Refleksjon og brytning:

$$\begin{aligned}\theta_r &= \theta_i \\ n_1 \sin \theta_i &= n_2 \sin \theta_t\end{aligned}$$

- Youngs eksperiment med to smale spalter:

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)$$

- Diffraksjonsgitter med  $N$  smale spalter:

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2 \left( \frac{N\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}{\sin^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}$$

- Diffraksjon fra en spalte:

$$I(\theta) = I(0) \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)}{\left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)^2}$$

- Diffraksjon fra  $N$  spalter, spaltebredde  $a$ , spalteavstand  $d$ :

$$I(\theta) = \hat{I} \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)}{\left( \frac{\pi a}{\lambda} \sin \theta \right)^2} \cdot \frac{\sin^2 \left( \frac{N\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}{\sin^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Lorentztransformasjonene ( $\bar{S}$  har hastighet  $\mathbf{v} = v\hat{x}$  i forhold til  $S$ ):

$$\bar{x} = \gamma(x - vt)$$

$$\bar{y} = y$$

$$\bar{z} = z$$

$$\bar{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$x = \gamma(\bar{x} + v\bar{t})$$

$$y = \bar{y}$$

$$z = \bar{z}$$

$$t = \gamma\left(\bar{t} + \frac{v}{c^2}\bar{x}\right)$$

- Tidsdilatasjon:

$$\Delta t = \gamma\Delta\bar{t}$$

- Lengdekontraksjon:

$$\Delta\bar{x} = \gamma\Delta x$$

- Hastighet i  $S$  ( $\mathbf{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$ ):

$$u_x = dx/dt$$

$$u_y = dy/dt$$

$$u_z = dz/dt$$

Hastighet i  $\bar{S}$  ( $\bar{\mathbf{u}} = \bar{u}_x\hat{x} + \bar{u}_y\hat{y} + \bar{u}_z\hat{z}$ ):

$$\bar{u}_x = d\bar{x}/d\bar{t}$$

$$\bar{u}_y = d\bar{y}/d\bar{t}$$

$$\bar{u}_z = d\bar{z}/d\bar{t}$$

- Addisjon av hastigheter (alle hastigheter i samme retning):

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

- Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:

$$\bar{\nu} = \nu \left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2}$$

- Relativistisk impuls:

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$$

- Newtons 2. lov:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

- Energi (partikkel med masse  $m$ ):

$$\begin{aligned} E &= \gamma m c^2 \\ E_0 &= m c^2 \\ E_k &= E - E_0 \\ E^2 &= (pc)^2 + (mc^2)^2 \end{aligned}$$

- Elastisk prosess:  $E$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $E_k$  og  $m$  bevart.
- Uelastisk prosess:  $E$  og  $\mathbf{p}$  bevart.
- Lorentz invariant for system med flere partikler:

$$E^2 - p^2 c^2 = \overline{E}^2 - \overline{p}^2 c^2 = E_0^2$$

Her er  $E$  og  $\mathbf{p}$  ( $\overline{E}$  og  $\overline{\mathbf{p}}$ ) hhv total energi og total impuls i  $S$  ( $\overline{S}$ ), mens  $E_0$  er total energi i  $S_0$ , inertialsystemet der total impuls er null.

Alternativt kan dette formuleres som invarians av skalarproduktet av firer-impulsen med seg selv:

$$p_\mu p^\mu = \overline{p}_\mu \overline{p}^\mu$$

der

$$p^\mu = (E/c, p_x, p_y, p_z) \quad , \quad p_\mu = (E/c, -p_x, -p_y, -p_z)$$

GOD JUL!