

LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN SIF 4014 BØLGEFYSIKK/FYSIKK3
OG MNFFY101 GENERELL FYSIKK II 6/12 - 2002

Oppgave 1

- a) Frekvensen f_m togføreren på det ene toget vil måle for fløyklyden fra det andre vil i henhold til lign. (17) i formelsamlingen være:

$$f_m = \frac{1 - v_m/c}{1 - v_s/c} f_s = \frac{1 - (-30,0 \text{ m/s}/333 \text{ m/s})}{1 - (30,0 \text{ m/s}/333 \text{ m/s})} \cdot 4,40 \cdot 10^2 \text{ Hz}$$
$$= \underline{\underline{5,27 \cdot 10^2 \text{ Hz}}}$$

- b) Toget som kjører i medvind (tog A) vil ha hastighet i forhold til luften:

$$v = (30,0 - 10,0) \text{ m/s} = 20,0 \text{ m/s}$$

Tilsvarende vil toget som kjører i motvind (tog B) ha hastighet i forhold til luften:

$$v = (30,0 + 10,0) \text{ m/s} = 40,0 \text{ m/s}$$

Togføreren i tog A vil da (i henhold til lign. (17) i formelsamlingen) måle en frekvens fra fløyten i tog B:

$$f_A = \frac{1 - v_m/c}{1 - v_s/c} f_s = \frac{1 - (-20,0 \text{ m/s}/333 \text{ m/s})}{1 - (40,0 \text{ m/s}/333 \text{ m/s})} \cdot 4,40 \cdot 10^2 \text{ Hz}$$
$$= \underline{\underline{5,30 \cdot 10^2 \text{ Hz}}}$$

2

Togføreren i tog B vil måle en frekvens fra fløyten i tog A :

$$f_B = \frac{1 - v_m/c}{1 - v_s/c} f_s = \frac{1 - (-40.0 \text{ m/s}/333 \text{ m/s})}{1 - (20.0 \text{ m/s}/333 \text{ m/s})} \cdot 4.40 \cdot 10^2 \text{ Hz}$$
$$= \underline{\underline{5.24 \cdot 10^2 \text{ Hz}}}$$

Oppgave 2

- a) Det reflekterte lyset vil være linearpolarisert i retning normalt innfallsplanet dersom innfallsvinkelen på vannflaten er lik Brewster vinkelen. Fra lign. (52) i formelsamlingen følger:

$$\tan \theta_{iB} = n_{\text{vann}} = 1.33 \Rightarrow \theta_{iB} = 53.1^\circ$$

θ_{iB} er innfallsvinkelen og vinkelen det betraktede lyset danner med vannflaten blir da:

$$90^\circ - 53.1^\circ = \underline{\underline{36.9^\circ}}$$

For å få slukket ut alt lys må polarisatoren holdes slik at retningen som slipper gjennom $\vec{E}$ -feltet er i innfallsplanet. Den bør forøvrig holdes normalt skåleretningen for lyset som betraktes.

- b) For å slukke ut lyset reflektert fra overgangen luft/olje er det nødvendig å betrakte det under noe mindre vinkel med vannflaten enn hva tilfellet var for overgangen luft/vann, hvilket gir oss følgende relasjon for Brewstervinkelen i de to tilfellene:

$$\frac{\pi}{2} - \theta_{iB}^{\text{olje}} < \frac{\pi}{2} - \theta_{iB}^{\text{vann}}$$

$\Downarrow$

$$\theta_{iB}^{\text{olje}} > \theta_{iB}^{\text{vann}}$$

(1)

Ved hjelp av lign (52) i formelsamlingen, kan relasjonen for Bråvsterorkklene (1) omformes til en relasjon mellom brytningsindeksene for olje og vann, n_{olje} og n_{vann} :

$$\arctan(n_{olje}) > \arctan(n_{vann}) \quad (2)$$

Det følger av (2) (da $\arctan$ -funksjonen er en monotont stigende funksjon) at:

$$\underline{\underline{n_{olje} > n_{vann}}} \quad (3)$$

- c) Fasehastigheten $v_f = \frac{\omega}{k}$ finnes ved hjelp av dispersjons relasjonen (1):

$$v_f = \frac{\omega}{k} \stackrel{(1)}{=} \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{9,82 \text{ m/s}^2}{2\pi/0,50 \text{ m}}} = \underline{\underline{0,88 \text{ m/s}}} \quad (4)$$

Tilsvarende finnes for gruppehastigheten v_g (lign. (10) i formelsamling):

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9,82 \text{ m/s}^2}{2\pi/0,50 \text{ m}}} = \underline{\underline{0,44 \text{ m/s}}} \quad (5)$$

- d) Fourierkomponenten forplanter seg inn mot stranda med den tilhørende gruppehastighet, $v_g = 0,44 \text{ m/s}$, altså tilbake legger den strekningen $10,0 \text{ m}$ på tiden

$$t = 10,0 \text{ m} / 0,44 \text{ m/s} \approx \underline{\underline{23 \text{ s}}}$$

- e) Dersom luftens tetthet neglisjeres gir ligning (7) i formelsamlingen for fasehastigheten V_f :

$$V_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\gamma}{\lambda\rho}} \quad (6)$$

med ρ lik vannets tetthet. (6) kan via relasjonen $V_f = \omega/k$ omformes:

$$\omega = k \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{k\gamma}{\rho}} = \sqrt{gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}} \quad (7)$$

Første ledd under rottegnet i (7) gjenteknes fra pkt c og d ovenfor som det dominerende bidrag for tyngdebølger på dypt vann. Det andre leddet beskriver grenseflatespenningens betydning for bølgeutbredelsen. For en fourier-komponent med tilhørende bølgelengde 17 mm vil de to leddene bidra omtrent like mye og begge må derfor tas med i den videre regning. Fra (7) finnes gruppehastigheten:

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \left(g + \frac{3\gamma k^2}{\rho} \right) / \sqrt{gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}} \quad (8)$$

Setter vi inn for g , γ , k og ρ

($g = 9.82 \text{ m/s}^2$, $\gamma = 0.070 \text{ N/m}$, $k = 2\pi/0.017 \text{ m}$, og $\rho = 1.00 \text{ kg/dm}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3$) finnes følgende gruppefart for

den aktuelle fourierkomponenten:

$$v_g = \frac{0.5 \left(9.82 \text{ m/s}^2 + \frac{3 \cdot 0.070 \text{ N/m} \cdot (2\pi/0.017 \text{ m})^2}{1000 \text{ kg/m}^3} \right)}{\sqrt{9.82 \text{ m/s}^2 (2\pi/0.017 \text{ m}) + \frac{0.070 \text{ N/m} (2\pi/0.017 \text{ m})^3}{1000 \text{ kg/m}^3}}} = 0.227 \text{ m/s} \approx \underline{\underline{0.23 \text{ m/s}}}$$

Fourierkomponenten med tilhørende bølgelengde $\lambda_0 = 17 \text{ mm}$ bruker følgende tiden

$$t = 1.0 \text{ m} / 0.227 \text{ m/s} \approx \underline{\underline{4.4 \text{ s}}}$$

på å nå stranden fra det stedet der den ble generert 1,0 m borte.

- f) Kaller vi den romlige lengden av bølgetoget L og tidslengden τ , vil det i et øyeblikksbilde tatt av bølgetoget i det det passerer $x = x_1$, telles

$$n = \frac{L}{\lambda_0} = \frac{L}{T_0 v_g} = \frac{\tau v_g}{T_0 v_g} \quad (10)$$

klare bølgetopper.

Fra dispersjonsrelasjonen $\omega = \sqrt{gk}$ følger at

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} = \frac{1}{2} v_f \quad (11)$$

(11) inn i (10) gir sammen med $\tau = 12 T_0$:

$$n = \frac{12 T_0}{T_0} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{6}}$$

Dvs. i øyeblikksbildet kan telles 6 klare topper.

g)

Fra dispersjonsrelasjonen

$$\omega = \sqrt{gD} \cdot k$$

følger at

$$v_g = \sqrt{gD} = \frac{\omega}{k} = v_f$$

og at vi altså ikke har dispersjon. Dette betyr at et øyeblikksbilde vil inneholde like mange toppe som vi ser passere punktet $x = x_1$, dvs. 12 klare bølgetopper.

Antall klare bølgetopper i øyeblikksbilde kan også regnes ut på samme måte som i oppg. f:

$$n = \frac{L}{\lambda_0} = \frac{L}{T_0 v_f} = \frac{T v_g}{T_0 v_f} = \frac{12 T_0}{T_0} \cdot 1 = \underline{\underline{12}}$$

Oppgave 3

- a) Oppgitt vektorrelasjon $\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$ *
 anvendt på det elektriske feltet $\vec{E}$, gir oss
 Maxwells ligninger på differensialform
 (lign. (23)-(26) i formelssamling);

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &\stackrel{(25)}{=} -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) \stackrel{(26)}{=} -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \\ &= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \stackrel{=0}{=} -\nabla^2 \vec{E} \\ &\quad \text{(fra (23)_{P=0})} \end{aligned}$$

Altså:

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{med } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \text{Q.E.D.}$$

- b) Bølgeligningen (2) i oppg. teksten er en lineær
 partiell differensiallikning med konstante
 koeffisienter. Den gjelder for hver av delbølgene
 og må da også gjelde for summen.

Regning gir at $V\vec{S} = H\vec{S}$:

$$\begin{aligned} V\vec{S}: \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{E} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (E_0 \vec{e}_y \cos(kx - \omega t) + E_0 \vec{e}_z \cos(kx - \omega t + \varphi)) \\ &= -k^2 E_0 \vec{e}_y \cos(kx - \omega t) - k^2 E_0 \vec{e}_z \cos(kx - \omega t + \varphi) \\ &= -k^2 \vec{E} \end{aligned}$$

* Denne vektorrelasjonen var oppgitt feilaktig på
 eksamensoppgaven. Feilen ble rettet i løpet
 av eksamen og eksamenstiden ble som kompensasjon
 forlenget med 1/2 time.

$$\begin{aligned}
 \text{HS: } \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E_0 \vec{e}_y \cos(kx - \omega t) + E_0 \vec{e}_z \cos(kx - \omega t + \varphi)) \\
 &= \frac{1}{c^2} \left[(-\omega)^2 (-1) E_0 \vec{e}_y \cos(kx - \omega t) + (-\omega)^2 (-1) E_0 \vec{e}_z \cos(\omega t - kx + \varphi) \right] \\
 &= -\frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{\omega}{k} = c = \text{konst}}}{=} -k^2 \vec{E} \qquad \text{QED.}
 \end{aligned}$$

Altså, VS = HS og bølgefunktisjonen (3) i oppg. felstet oppfyller bølgeign. (2) (i oppg. felstet) for alle φ og alle ω og k , som oppfyller $\omega/k = c$.

- c) Betingelsen for at $\vec{E}(x, t)$ beskriver en linearpolarisert bølge er at projeksjonen av feltvektoren $\vec{E}(x, t)$ i yz-planet faller langs en rett linje. Dersom vi kaller vinkelen denne linjen danner med y-aksen for θ , kan vi sette:

$$\tan \theta = \frac{E_z}{E_y} = \frac{E_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)}{E_0 \cos(kx - \omega t)} = \text{konstant.} \quad (1)$$

(1) gir ved omforming:

$$\cos(kx - \omega t) \cdot \tan \theta = \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\cos(kx - \omega t) \cdot \tan \theta = \cos(kx - \omega t) \cos \varphi - \sin(kx - \omega t) \sin \varphi$$

$$\cos(kx - \omega t) [\tan \theta - \cos \varphi] = -\sin(kx - \omega t) \cdot \sin \varphi \quad (2)$$

Da $\cos(kx - \omega t)$ og $\sin(kx - \omega t)$ er lineært uavhengige funksjoner vil (2) være oppfylt kun dersom

$$\sin \varphi = 0 \qquad (3)$$

og $\tan \theta - \cos \varphi = 0 \qquad (4)$

Kravene (3) og (4) gir:

$$\underline{\varphi = 0 \text{ (med } \theta = \pi/4) \text{ eller } \varphi = \pi \text{ (med } \theta = \frac{3\pi}{4})}$$

Dette resultatet er det mulig å komme fram til på enklere vis ved på fysikalsk grunnlag innse at bølgefunksjonen (3) i oppg. telsten beskriver en lineærpolarisert bølge kun når de to delbølgene svinger i fase ($\varphi = 0$) eller i motfase ($\varphi = \pi$).

Betingelsen for at $\vec{E}(x,t)$ beskriver en sirkulærpolarisert bølge er at endepunktet av feltvektoren $\vec{E}(x,t)$'s projeksjon i yz-planet faller på en sirkel linje. Dersom vi kaller radius i sirkelen E kan vi sette:

$$E^2 = |\vec{E}(x,t)|^2 = E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) + E_0^2 \cos^2(kx - \omega t + \varphi) = \text{konstant} \quad (5)$$

eller

$$\cos^2(kx - \omega t) + \cos^2(kx - \omega t + \varphi) = E^2/E_0^2 \quad (6)$$

Vi kan omforme venstre siden i likn. (6) på følgende vis (vi innfører midlertidig $kx - \omega t = A$ for å forenkle skrivearbeidet):

$$\begin{aligned} \cos^2 A + \cos^2(A + \varphi) &= \cos^2 A + [\cos A \cos \varphi - \sin A \sin \varphi]^2 \\ &= \cos^2 A + \cos^2 A \cdot \cos^2 \varphi + \sin^2 A \sin^2 \varphi - 2 \cos A \sin A \cos \varphi \sin \varphi \\ &= \cos^2 A + \cos^2 A \cos^2 \varphi + (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 \varphi) - 2 \cos A \sin A \cos \varphi \sin \varphi \\ &= \cancel{\cos^2 A} + \cos^2 A \cos^2 \varphi + 1 - \cos^2 \varphi - \cancel{\cos^2 A} + \cos^2 A \cos^2 \varphi - 2 \cos A \sin A \cos \varphi \sin \varphi \\ &= [2 \cos^2 A - 1] \cos^2 \varphi + 1 - 2 \cos A \sin A \cos \varphi \sin \varphi \\ &= \cos 2A \cdot \cos^2 \varphi + 1 - \frac{1}{2} \sin 2A \cdot \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (7)$$

Ved substitusjon $A = kx - \omega t$ i (7) og innsetting i (6) får vi:

$$\cos 2(kx - \omega t) \cdot \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \sin 2(kx - \omega t) \sin 2\varphi = \frac{\xi^2}{E_0^2} - 1 \quad (8)$$

Da $\cos 2(kx - \omega t)$ og $\sin 2(kx - \omega t)$ er lineært uavhengige funksjoner kan likningen kun være oppfylt for alle x og t dersom:

$$\cos^2 \varphi = 0 \quad (9)$$

$$\sin 2\varphi = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\xi^2}{E_0^2} - 1 = 0 \quad (11)$$

Fra kravene (9)-(11) følger at

$$\underline{\underline{\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ eller } \varphi = \frac{3\pi}{2} \text{ med } \xi = E_0}}$$

På samme vis som ovenfor for det lineærpolariserte tilfellet kunne ovenstående resultat vært innsett på enklere vis (uten regning) ved på fysikalsk grunnlag innse at betingelsen for sirkulærpolarisasjon kun kan være oppfylt dersom de to delbølgene har faseforskjell $+\frac{\pi}{2}$ eller $-\frac{\pi}{2}$ (dvs $\frac{3\pi}{2}$ dersom vi krever at $\varphi \in [0, 2\pi)$).

Oppgave 4

Romskipet A har under hele tankeeksperimentet jevn og rettlinjet hastighet. Vi velge derfor å betrakte hele tankeeksperimentet i det inertialsystemet der A er i ro (under hele eksperimentet) og kaller i fortsettelsen dette for A's referansesystem.

I dette referansesystemet er trådens hastighet fra begynnelse til slutt endret fra null til $V = 6,00 \cdot 10^6 \text{ m/s}$.

Målt fra A's referansesystem vil lengden av tråden (dersom den ikke strekkes eller går av) derfor være endret fra L_0 ved begynnelses tilstanden til L ved slutt-tilstanden, med følgende sammenheng mellom L_0 og L :

$$L = L_0 / \gamma \quad (1)$$

der

$$\gamma = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \quad (2)$$

(se lign. (65) og (67) i formelsamlingen vedlagt eksamensoppgaven.)

Differansen mellom opprinnelig lengde L_0 av båten og lengden målt i slutt-tilstanden fra A's referansesystem (dersom båten ikke brister eller forlenyes) kaller vi ΔL . Da har vi:

$$\begin{aligned} \Delta L &= L_0 - L \stackrel{\uparrow (1)}{=} L\gamma - L \\ &= L(\gamma - 1) \end{aligned} \quad (3)$$

som gir for $\Delta L/L$:

$$\frac{\Delta L}{L} = (\gamma - 1) = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} - 1$$

$$\begin{aligned} \nearrow \quad (v/c \ll 1) \quad & \approx \frac{1}{1 - \frac{1}{2} v^2/c^2} - 1 \approx 1 + \frac{1}{2} v^2/c^2 - 1 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{6,0 \cdot 10^6}{3,00 \cdot 10^8} \right)^2 = \underline{2,0 \cdot 10^{-4}} \end{aligned} \quad (4)$$

Sen trene til romskipene B og C har i A's referansesystem hele tiden hatt samme akselerasjon og dermed hastighet. Avstanden mellom dem har dermed også alltid vært den samme og er det også etter akselerasjonsprogrammet er avsluttet.

Forat båden ikke skal bryte, må den derfor ta forlengelsen ΔL gitt ovenfor ved ligning (3).

ΔL og L er begge sett fra A 's referansesystem og tråden tåler observert fra hans (og alle andres inertiale) referansesystem kun en relativ forlengelse på $1,00 \cdot 10^{-4}$.

Den relative $\sqrt{\text{forlengelsen}}$ tråden må tåle for å ikke å bryte under akselerasjonsprosessen er altså gitt ved Lign. (4) og lik $2,0 \cdot 10^{-4}$. Det er to ganger den forlengelsen den er oppgitt å skulle tåle.

Altså har tråden gått av under akselerasjonsprosessen.

Merknad.

Denne oppgaven ble gitt for å teste forståelsen av følgende fundamentale aspekt:

- 1) Avstanden mellom to punkt (her feste-
punktene til tråden) observert fra
ett gitt inertialt referansesystem vil
ikke endres når begge punktene
hele tiden har samme hastighet
observert i dette referansesystemet.
Det er ingen forskjell på klassisk
mekanikk og spesiell relativitetsteori
når det gjelder dette fordi ^{posisjonen til og} avstanden
mellom de to punktene hele tiden
kan måles (dvs kan merkes av på
et fysisk legeme i ro) i dette
referansesystemet.
- 2) Et fysisk legeme (her tråden) som
har en hastighet i forhold til
et referansesystem vil i dette
referansesystemet observeres med mindre
lengde enn den lengden som observeres
i det referansesystemet der legemet er
i ro. Dette er et av de fundamentale
aspekt der spesiell relativitetsteori (og
virkeligheten) gir et annet resultat
enn klassisk mekanisk teori.