

LØSNINGSFØRSLAG for Eksamen i

FYSIKK 3 2/12 1998.

Oppgave 1

a) Fasehastigheten $v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} = v\lambda = 905 \cdot 10^3 = 90 \text{ m/s}$

Det at en harmoniske v ndeb rge $D(x,t)$ med vill rl g frekvens ν (eller v ndelfrekvens $\omega = 2\pi\nu$) oppf ller b rgel gn ngen (1) betyr at l s ngens venstre og h yre side blir like ved innset ing av $D(x,t)$ s le denne er g tt i l s ng (2). Ved innset ing:

$$\begin{aligned} \text{VS: } & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-k D_0 \sin(kx - \omega t + \varphi) \right) = -k D_0 (k \cos(kx - \omega t + \varphi)) \\ &= -k^2 D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) = -k^2 D(x,t) \\ \text{HS: } & K \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) \right) \\ &= K \frac{\partial}{\partial t} (\omega D_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)) = \omega D_0 K (-\omega) \cos(kx - \omega t + \varphi) \\ &= -\omega^2 K D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) = -\omega^2 K D(x,t) \end{aligned}$$

f r at $VS = HS$, m  vi ha at $-k^2 = -\omega^2/K$ eller

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{K}} \cdot k = \text{konstant} \cdot k \quad \text{Q.E.D.}$$

h r konstanten $\frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{1}{v_f}$

b) B rgpulsen vil ikke endre form da vi f r b rge p  streng ikke har dispers on (som v st i pkt a), dvs.

$$v_g = \frac{\omega}{k} = \text{konstant} (= \sqrt{F/\mu})$$

uavheng g frekvensen. Alle frekvenskomponentene har derfor samme fasehastighet, hvilket betyr at det innbyrdes faseforhold mellom de forskjellige komponentene (som bestemmer pulsens form) ikke endres.

N r vi ikke har dispers on, vil vi ha f r gruppehastigheten:

$$v_g \equiv \frac{d\omega}{dk} = v_f = \text{konstant} = \sqrt{F/\mu}$$

Gruppehastigheten er i dette tilfellet like fasehastigheten og entydig g tt av strengens egenskaper (μ og F). Gruppehastigheten for pulsen m  derfor ha samme tallverdi som fasehastigheten beregnet i punkt a.

$$v_g = v_f = 9,0 \text{ m/s}$$

c) Fra l kn. (4) finner vi:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{A + Bk^2}$$

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \left(\frac{k}{A + Bk^2} \right) \\ &= \frac{1}{A + Bk^2} + k \cdot \frac{(-1) \cdot 2Bk}{(A + Bk^2)^2} = \frac{A - Bk^2}{(A + Bk^2)^2} \end{aligned}$$

Vi har vha. lign. (3) i oppgaven:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0/n} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot (1.509 + \frac{4.68 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2}{\lambda_0^2})$$

For grønt lys:

$$k^2 = \frac{2\pi^2}{500 \cdot 10^{-9} \text{ m}} \left(1.509 + \frac{4.68 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2}{(500 \cdot 10^{-9} \text{ m})^2} \right) = \underline{\underline{1.92 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}}}$$

Denne verdien innsett i ovenstående uttrykk for v_g og v_f gir:

$$\underline{\underline{v_f^g = \frac{1}{5.032 \cdot 10^{-9} \text{ m}^1/\text{s} + 1.65 \cdot 10^{-25} \text{ ms} (1.92 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1})^2} = 1.914 \cdot 10^8 \text{ m/s}}}$$

$$\underline{\underline{v_g^g = \frac{5.032 \cdot 10^{-9} \text{ m}^1/\text{s} - 1.65 \cdot 10^{-25} \text{ ms} (1.92 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1})^2}{[5.032 \cdot 10^{-9} \text{ m}^1/\text{s} + 1.65 \cdot 10^{-25} \text{ ms} (1.92 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1})^2]^2} = 1.917 \cdot 10^8 \text{ m/s}}}$$

4) På samme måte som bølgetallet k og gruppekraftighet v_g for grønt lys ble beregnet i punkt c) finner vi for rødt og rødt lys:

$$k^r = 2.42 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \quad \text{og} \quad k^r = 1.36 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

$$v_g^r = 1.876 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad \text{og} \quad v_g^r = 1.952 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Forskjell i ankomsttid for rødt og fiolett lys blir:

$$\underline{\underline{\Delta t = \frac{100 \text{ m}}{1.876 \cdot 10^8 \text{ m/s}} - \frac{100 \text{ m}}{1.951 \cdot 10^8 \text{ m/s}} =}}$$

$$= 533 \text{ ns} - 513 \text{ ns} = \underline{\underline{20 \text{ ns}}}$$

Oppgave 2

a) Av figuren i oppgaveteksten ser vi at ganglengde forskjellen mellom stråler fra S_1 og S_2 til P er $d \sin \theta$. Vi får da konstruktiv interferens, dvs sentrum i de lysstriperne eller lysmaksima for:

$$d \sin \theta = n \lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

dvs for bryningsvinkler θ gitt ved

$$\underline{\underline{\sin \theta = n \frac{\lambda}{d}}} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

Med $\lambda = 500 \text{ nm}$ og $d = 50 \mu\text{m}$ gir

(1):

$$\sin \theta = n \cdot 0,01 \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Siden $\sin \theta$ maksimalt kan være 1 får vi altså lysmaksima for θ gitt ved:

$$\underline{\underline{\sin \theta = n \cdot 0,01}} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 100 \quad (2)$$

2.2

b) Totalt felt E_θ i pnt. P er gitt ved:

$$E_\theta = E_1 + E_2 = E_0 \left\{ \cos(kr - \omega t - \phi) + \cos\left(k(r + \Delta r) - \omega t - \phi\right) \right\} \quad (3)$$

Oppgitt:

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad (4)$$

(4) i (3) med $a = kr - \omega t - \phi$ og $b = k(r + \Delta r) - \omega t - \phi$

gir:

$$E_\theta = 2E_0 \cos\left(k\left(r + \frac{\Delta r}{2}\right) - \omega t - \phi\right) \cos\left(-\frac{k\Delta r}{2}\right) \quad (5)$$

Kd figurkretsløp:

$$\Delta r = d \sin \theta \quad (6)$$

Definer:

$$\delta \equiv kd \sin \theta = k\Delta r \quad (7)$$

(6) og (7) innsett i (5) gir:

$$E_\theta = 2E_0 \cos \frac{\delta}{2} \cos\left(k\left(r + \frac{\Delta r}{2}\right) - \omega t - \phi\right) = E_r \quad (8)$$

$$= E_{\theta_0} \cos(\omega t + \phi_1) \quad (9)$$

der vi har definert

$$\phi_1 = k(r + \Delta r/2) - \phi \quad (10)$$

For et gitt pnt. P. er ϕ_1 konstant og iflg det oppgitt for vi da:

$$\begin{aligned} I_\theta &= \epsilon_0 c_0 \overline{E_\theta^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c_0 E_{\theta_0}^2 \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 c_0 \left(2 E_0 \cos \frac{\delta}{2} \right)^2 = 2 \epsilon_0 c_0 E_0^2 \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad (11) \end{aligned}$$

For $\theta = 0$

$$I_0 = 2 \epsilon_0 c_0 E_0^2 \quad (12)$$

og dermed:

$$\underline{I_\theta = I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2}} \quad \text{q.e.d.} \quad (13)$$

Vi får maksimum lysintensitet når

$$\frac{\delta}{2} = m\pi \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (14)$$

dvs når:

$$\frac{k d \sin \theta}{2} = m\pi$$

eller (med $k = \frac{2\pi}{\lambda}$) för:

$$\sin \theta = m \frac{\lambda}{d} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (15)$$

så är det samma som vi fick i pkt. a.

c) Interferensmönstret när $\theta = 0$

vil inte bli påverkat av att

$L_c = 50 \mu\text{m}$ i stället för att $L_c = \infty$,

jord gånglängdeförskjellen ΔL från S_1 och S_2

bl observationsskikten B då de är

väsentligt mindre än L_c . Sedan L_c

inte påverkar middelvärdet vil öka

positionen bl strålsnittsmaxima bli

ändret verken för små eller

store θ . Men när $\sin \theta$ blir

av samma storleksorden som L_c

dvs när:

$$\sin \theta \approx \pm L_c$$

eller:

$$\sin \theta \approx \pm \frac{L_c}{d} = \pm \frac{50 \mu\text{m}}{50 \mu\text{m}} = \pm 0,1 \quad (16)$$

2.5

begynner det å bli mindre kontrast mellan lys och mörka striper. När $\sin \theta$ närmer sig

± 1 vil våglängdskillen närme

sig $50 \mu\text{m}$ dvs. $10 L_c$, och lys

från S_1 och S_2 är då tillräckligt

inkohärent med varandra och

strålmönstret utvisket.

d) Det lysat som går genom glasskivan och S_2 vil bli förstärkt sammanlagt med det lysat som går genom S_1 . Kallas tjockelsen av glasskivan b blir färförskjellen ΔL givet ved:

$$\Delta L = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot b - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot b = (n-1) \frac{2\pi}{\lambda} \cdot b \quad \text{Tillräckande våglängdskill i vakuum blir:}$$

$$f = (n-1) b$$

Tillfälle I

$$f = (1,50 - 1,00) \cdot 500 \text{ nm} = 250 \text{ nm} = \frac{1}{3} \lambda_m$$

Betingelsen for lysmaksima blir da:

$$d \sin \theta = (n - \frac{1}{2}) \lambda_m \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18)$$

Dvs. vi får maksima der vi hadde minima uten glass og omvendt

(Sentrum av interferensmønsteret er her gitt ved:

$$\sin \theta_I = -\frac{1}{2} \frac{\lambda_m}{d} = -0,005 \quad (19)$$

og utvisking begynner likt på begge sider av $\sin \theta_I$ som den gjorde på begge sider $\sin \theta = 0$ uten glass. (Dette forventes ikke for å full uttelling for alle I siden det er så liten forstyrrelse.)

Tilfelle II

$$f = (1,50 - 1,00) \cdot 1000 \text{ nm} = 500 \text{ nm} = \lambda_m$$

Betingelsen for lysmaksima blir da:

$$d \sin \theta = (n - 1) \lambda_m \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (20)$$

Dvs vi får lysmaksima og lysminima der vi hadde det uten glass.

(Sentrum av interferensmønsteret er her gitt ved:

$$\sin \theta_{II} = -\frac{\lambda_m}{d} = -0,01 \quad (21)$$

og utvisking begynner likt på begge sider av $\sin \theta_{II}$ som den gjorde på begge sider av $\sin \theta = 0$ uten glass. (Dette forventes ikke for å full uttelling for alle II siden det er så liten forstyrrelse.)

Tilfelle III

$$f = (1,50 - 1,00) \cdot 30 \mu\text{m} = 15 \mu\text{m} = 30 \lambda_m$$

Sentrum i det sydlige interferensmønsteret vil nå være gitt ved:

2.8

$$\sin \theta_{III} = -30 \frac{\lambda_m}{d} = -0,30 \quad (22)$$

og de vinkelene der interferensmønstret begynner å bli utydelig finnes forstykket fra der ganglengdeforskjellen er $L_c = 10 \lambda_m$ det gitt ved lign.(22), dvs: når:

$$\sin \theta = \frac{-30 \lambda_m \pm 10 \lambda_m}{d}$$

dvs når:

$$\sin \theta = \begin{cases} -0,2 \\ -0,4 \end{cases} \quad (25)$$

I den grad lysmaksima kan sees på samme sted som uten glass vil de ha samme posisjon som disse, men vi har altså ikke tydelige lysmaksima på samme sted som når vi ikke har glass foran S_2

2.9

Tilfelle 4 $b = 1000 \mu m$

$$f = (1,50 - 1,00) \cdot 1000 \mu m = 500 \mu m = 100 L_c$$

Den minste oppsøkte ryklengdeforskjell vi da kan gå på skjermen er

$$f - d = 500 \mu m - 50 \mu m = 450 \mu m = 90 L_c$$

Dvs at intet lys ^{fra S_1} som er

klarest koherert ^{ved S_2} fra S_2 kan nåes på noe punkt på observasjonsskjermen B. Vi for

derfor bare en jevn lysfordeling på denne og intet interferensmønstre.

c) V_i har gån her at

$$\Delta r = d \sin \theta \quad (26)$$

g skeder

$$\delta \equiv k \Delta r = k d \sin \theta \quad (27)$$

V_i får da:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= \Psi_1 + \Psi_2 \\ &= \Psi_0 [e^{i[kr - \omega t - \varphi]} + e^{i[k(r + \Delta r) - \omega t - \varphi]}] \quad (28) \end{aligned}$$

g dermed

$$\begin{aligned} |\Psi_0|^2 &= \Psi_0 \cdot \Psi_0^* \\ &= |\Psi_0|^2 [e^{i[kr - \omega t - \varphi]} + e^{i[k(r + \Delta r) - \omega t - \varphi]}] \\ &\quad \cdot [e^{-i[kr - \omega t - \varphi]} + e^{-i[k(r + \Delta r) - \omega t - \varphi]}] \end{aligned}$$

$$= |\Psi_0|^2 [1 + e^{-i k \Delta r} + e^{i k \Delta r} + 1]$$

$$= (|\Psi_0|^2) \cdot 2 [1 + \cos \delta]$$

$$\begin{aligned} (29) \quad &= \frac{4 |\Psi_0|^2 \cos^2 \frac{\delta}{2}}{2} \quad (29) \end{aligned}$$

I følge Max Boms sannsynlighets-
interpretasjon er $|\Psi_0|^2$ sannsynlighets-
tettheten for ett (dvs. hvert)
elektrons treffpunkt.

Oppgave 3

31

Vi kaller lengden micronet tildekker i jordas referansesystem ΔL , høyheten i jordas referansesystem U_{min} og tiden det eksisterer målt fra jorda Δt_0 og egen-tida det eksisterer Δt_0 . Vi har da:

$$S = U_{min} \cdot \Delta t = U_{min} \cdot \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (U_{min}/c)^2}} \quad (1)$$

som gir

$$\left(1 - \frac{U_{min}^2}{c^2}\right) \cdot S^2 = (U_{min} \cdot \Delta t_0)^2$$

og:

$$U_{min} = \left(\frac{S^2}{\frac{S^2}{c^2} + (\Delta t_0)^2} \right)^{1/2} = c \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\Delta t_0 c}{S}\right)^2\right)^{1/2}}$$

$$\approx c \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t_0 c}{S}\right)^2\right)$$

$$= c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{(2,20 \cdot 10^{-6} \cdot 2,997925 \cdot 10^8)^2}{1,00 \cdot 10^4}\right)$$

$$\approx \underline{\underline{0,997825 \cdot c \approx 2,9914 \cdot 10^8 \text{ m/s}}} \quad (2)$$

32

Vi kaller lengden fra jordas overflate til danmarks punkt for micronet i jordas referansesystem for L_0 . Tilsvarende lengde i micronets referansesystem kalles L . Vi har da:

$$\begin{aligned} L &= L_0 \left(1 - (U_{min}/c)^2\right)^{1/2} \\ &= 1,00 \cdot 10^4 \text{ m} \left(1 - (0,997825)^2\right)^{1/2} \\ &\approx \underline{\underline{6,59 \cdot 10^2 \text{ m}}} \quad (3) \end{aligned}$$