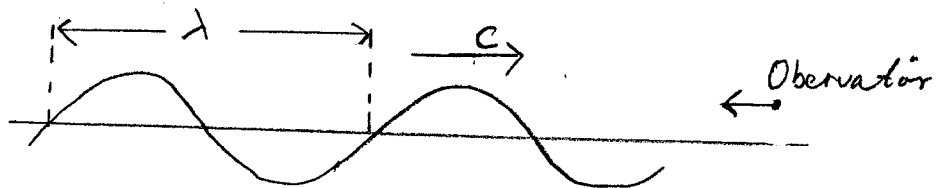


Oppgave 1

a)



Tiden mellom hver gang observatøren møter f.eks. en bølgetopp må være en bølglengde dividert med relativ hastighet mellom bølge og observatør, dvs :

$$T = \frac{\lambda}{c - (-v_m)} = \frac{\lambda}{c + v_m}$$

Frekvensen f_m er lik T^{-1} , dvs

$$f_m = \frac{1}{T} = \underline{\underline{\frac{c + v_m}{\lambda}}} \quad (1)$$

q.e.d.

- b) Lydbølgen fra togets fløyte forplanter seg i luft og refereres til et koordinatsystem som beveger seg sammen med luften. I dette koordinatsystemet står toget stille og perrongen beveger seg mot toget med hastighet $10,0 \text{ m/s}$.
Derfor:

$$\begin{aligned}
 f_m &= \frac{c + v_m}{\lambda} = \frac{c + v_m}{c} f \\
 &= (1 + v_m/c) f = \left(1 + \frac{10,0}{329}\right) \cdot 4,00 \cdot 10^2 \text{ Hz} \\
 &= \underline{\underline{412 \text{ Hz}}} \quad (2)
 \end{aligned}$$

c) $p = p_1 + p_2$

$$= p_0 [\cos(k_1 x - \omega_1 t + \phi_1) + \cos(k_2 x - \omega_2 t + \phi_2)]$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 p_0 \cos\left(\frac{k_2 - k_1}{2} x - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t + \frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right) \cos\left(\frac{k_2 + k_1}{2} x + \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \frac{\phi_2 + \phi_1}{2}\right) \\
 &\quad \uparrow \\
 &\quad \text{(ved gitt formel)}
 \end{aligned}$$

$$= 2p_0 \cos\left(\Delta k \cdot x - \Delta\omega \cdot t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(kx - \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \quad (3)$$

Amplitudevariation
som varierer sakte
siden $\Delta\omega \ll \omega_1, \omega_2$

Bærebølge

f.e.d.

der vi har satt

$$\underline{k \equiv \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}} \quad (4)$$

$$\underline{\Delta k = \frac{k_2 - k_1}{2}, \quad \Delta\omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}} \quad (5)$$

Siden svevefrekvensen er den frekvensen
intensiteten I varierer med

$$I \propto \cos^2\left(\Delta k \cdot x - \Delta\omega \cdot t - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \quad \text{med}$$

vi ha:

$$V_s = \frac{2\Delta\omega}{2\pi} = 2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \frac{1}{2\pi} = \underline{\underline{\frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}}} \quad (6)$$

Doppler forskyvning ^{for dette tilfellet} er gitt ved lign (17)

i formelliste med $f_s = f$ og $v_m = 0$

v_s like henholdsvis v_1 og v_2 , dvs

$$f_{m_i} = \frac{1}{1 - v_i/c} f \quad i=1,2 \quad (7)$$

Sam gir:

$$\omega_i = \frac{2\pi}{1 - v_i/c} f \quad (8)$$

og:

$$k_i = \frac{\omega_i}{c} = \frac{2\pi}{c - v_i} f \quad (9)$$

Dermed:

$$\Delta k = \frac{k_2 - k_1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c - v_2} - \frac{1}{c - v_1} \right) 2\pi f$$

$$= \frac{v_2 - v_1}{(c - v_2) \cdot (c - v_1)} \pi f \quad (10)$$

$$\Delta \omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{c - v_2} - \frac{c}{c - v_1} \right) 2\pi f$$

$$= \frac{c \cdot (v_2 - v_1)}{(c - v_2)(c - v_1)} \pi f_s = c \Delta k \quad (11)$$

$$v_s = \frac{\Delta \omega}{\pi} = \frac{c (v_2 - v_1)}{(c - v_2)(c - v_1)} f = \frac{c \Delta k}{\pi} \quad (12)$$

Fallverlier:

$$\Delta k = \frac{30,0 - 20,0}{(329 - 30)(329 - 20)} \pi \cdot 4,00 \cdot 10^2 \text{ rad/m}$$

$$= \underline{\underline{0,136 \text{ rad/m}}}$$

$$\Delta \omega = 329 \cdot 0,136 \text{ rad/s} = \underline{\underline{44,7 \text{ rad/s}}}$$

$$v_s = \frac{\Delta \omega}{\pi} \text{ Hz} = \underline{\underline{14,2 \text{ Hz}}}$$

d) Lige (17) i fra formelliste:

$$f_m = \frac{1 - v_m/c}{1 - v_s/c} f_s$$

der v_m og v_s har samme retning som lydforplantningen.

For tog 2 har vi $v_s = v_1 + v_{\text{vind}} = 40 \text{ m/s}$

" tog 1 - " - $v_s = v_2 + v_{\text{vind}} = 30 \text{ m/s}$

For begge tog har vi for observatøren $v_m = v_{\text{vind}} = 10 \text{ m/s}$

(fordi det er luften som er referencesystemet for lydbølgerne)

Dette gir for frekvensen f_1 observeret fra tog nr 1:

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{c - v_{\text{vind}}}{c - (v_1 + v_{\text{vind}})} 2\pi f \quad (13)$$

og for frekvensen observeret fra tog nr 2:

$$\omega_2 = 2\pi f_2 = \frac{c - v_{\text{vind}}}{c - (v_2 + v_{\text{vind}})} 2\pi f \quad (14)$$

Dermed ved (12), (13) og (14) :

$$V_s = \frac{\Delta\omega}{\pi} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$$

$$= \left[\frac{c - v_{\text{ind}}}{c - (v_2 + v_{\text{ind}})} - \frac{c - v_{\text{ind}}}{c - (v_1 + v_{\text{ind}})} \right] f$$

$$= f \cdot \frac{\cancel{c^2} - c v_1 - \cancel{c v_{\text{ind}}} - \cancel{v_{\text{ind}} c} + v_{\text{ind}} v_1 + \cancel{v_{\text{ind}}^2} - \cancel{c^2} + c v_2 + \cancel{c v_{\text{ind}}} + \cancel{c v_{\text{ind}}} - v_{\text{ind}} v_2 - \cancel{v_{\text{ind}}^2}}{(c - v_2 - v_{\text{ind}})(c - v_1 - v_{\text{ind}})}$$

$$= \frac{c(v_2 - v_1) - v_{\text{ind}}(v_2 - v_1)}{(c - v_2 - v_{\text{ind}})(c - v_1 - v_{\text{ind}})} f$$

$$= \frac{(c - v_{\text{ind}})(v_2 - v_1)}{(c - v_2 - v_{\text{ind}})(c - v_1 - v_{\text{ind}})} f \quad (15)$$

Tallverdi :

$$V_s = \frac{319 \cdot 10,0}{(329 - 40)(329 - 30)} \quad 4,00 \cdot 10^2 \text{ Hz}$$

$$= \underline{\underline{14,8 \text{ Hz}}}$$

Oppgave 2

- a) Oppgitt vektorrelasjon $\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$ anvendt på det elektriske felt $\vec{E}$, gir vi de Maxwells ligninger på differensialform (Lign (23)-(26) i formelsamling):

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &\stackrel{(25)}{=} -\nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) \stackrel{(26)_{j=0}}{=} -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \\ &= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \stackrel{\substack{= 0 \\ \text{(fra (23))}_{j=0}}}{=} -\nabla^2 \vec{E} \end{aligned}$$

Altså:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{med } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad \text{QED.} \end{aligned}$$

- b) Bølgligningen (1) er en lineær partiell differensialligning med konstante koeffisienter. Den gjelder for hver av delbølgene E_1 og E_2 , og må da også gjelde for summen.

Regning gir at $Vs = Hs$ fordi $\frac{\omega_1}{c} = k_1$ og $\frac{\omega_2}{c} = k_2$:

$$Vs: \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x,t) = -k_1^2 E_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) - k_2^2 E_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$\begin{aligned} Hs: \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E(x,t) &= \frac{1}{c^2} [-\omega_1^2 E_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) - \omega_2^2 E_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t)] \\ &= -k_1^2 E_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t) - k_2^2 E_2 \cos(k_2 x - \omega_2 t) \end{aligned}$$

fordi i vakuum $\frac{\omega_1}{c} = k_1$ og $\frac{\omega_2}{c} = k_2$

- c) Når lysstrålen går fra vakuum inn i et annet medium vil bølglengde og lyshastighet endres, men på en slik måte at frekvensen er uendret,
 Alltså $\omega_1 = \omega_3$ og $\omega_2 = \omega_4$

Fasehastighet $v_f = \omega/k$ i mediet:

$$\text{Grønt lys: } v_f^G = \frac{\omega_3}{k_3} = \frac{3,661 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}}{1,864 \cdot 10^7 \text{ rad/m}} = 1,964 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$\text{Blått lys: } v_f^B = \frac{\omega_4}{k_4} = \frac{4,143 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}}{2,117 \cdot 10^7 \text{ rad/m}} = 1,957 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Brytningsindeks $n = \frac{c}{v_f}$ i mediet:

$$\text{Grønt lys: } n = \frac{2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,964 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1,527$$

$$\text{Blått lys: } n = \frac{2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,957 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1,532$$

For elektromagnetiske bølger i et stoff gjelder $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$

Med $\mu_r = 1$ får vi at $n = \sqrt{\epsilon_r} \Rightarrow \epsilon_r = n^2$

$$\text{Grønt lys: } \epsilon_r = n^2 = (1,527)^2 = 2,332$$

$$\text{Blått lys: } \epsilon_r = (1,532)^2 = 2,347$$

- d) Vi har i pkt b) vist at en lysbølge av form (2) i vakuum oppfyller en bølgeligning av samme form som (4). Det følger ikke av dette at lysbølgen inne i et stoff oppfyller en bølgeligning av samme type. Inne i et stoff gjelder ikke to av antagelsene gjort ved utledningen av lkn. (1), nemlig at $\vec{S} = 0$ og $\vec{J} = 0$.

På samme måte som vist i pkt b) ville det være en nødvendig forutsetning at $k_3 = \omega_3 C$ og $k_4 = \omega_4 C$ forat bølgen (3) skulle oppfylle lkn (4). Dette ville medføre at

$$\frac{k_3}{k_4} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{k_1}{k_2} \quad \text{eller} \quad \frac{k_3}{k_1} = \frac{k_4}{k_2}$$

som er i motsetning til forutsetningen for oppgaven. Altså oppfyller ikke bølgen (3) en bølgeligning av form (4) med en verdi av C .

Oppgave 3

a) Vi har fra vedlagt formelliste

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \quad (1)$$

$$\text{der} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad (2)$$

u er her flyets hastighet. Δt_0 er egentiden mellom to hendelser målt med en klokke i ro i et referansesystem der de to hendelsene skjer på samme rompunkt. Δt_0 er altså derfor $\Delta \tau$ i oppgaveteksten. Δt er tiden målt mellom de to samme hendelser i et referansesystem med konstant rettinget hastighet i forhold til det første og svarer Δt i oppgaveteksten.

Fra (1) og (2) følger det $\Delta t > \Delta t_0$ så sant $u \neq 0$, og derfor:

$$\underline{\underline{\Delta t > \Delta \tau}}$$

$$b) \quad \Delta t = \gamma \Delta \tau = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Delta \tau$$

$$\approx \Delta \tau \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (3)$$

Dermed:

$$\Delta L_{\text{jord}} - \Delta L_{\text{fly}}$$

$$= v \Delta t - v \Delta \tau$$

$$= v (\Delta t - \Delta \tau) = v \Delta \tau \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} \Delta \tau \frac{v^3}{c^2}$$

$$= \frac{1}{2} 1,000 \cdot 10^4 \cdot \frac{(4,000 \cdot 10^2)^3}{(2,998 \cdot 10^8)^2} \text{ m}$$

$$\approx 3,56 \cdot 10^{-6} \text{ m} = \underline{\underline{3,56 \mu\text{m}}} \quad (4)$$

og ΔL_{jord} er altså lengre enn ΔL_{fly} (som er i samsvar med relativistisk lengdekontraksjon).

Oppgave 4

a)

$$\langle E \rangle_V = \sum_{n=0}^{\infty} p_n E_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT} \cdot nh\nu}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu/kT}}$$

$$= h\nu \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}$$

(x = e^{-h\nu/kT})

$$= h\nu \frac{x/(1-x)^2}{1/(1-x)}$$

(ved oppgitte form(er))

$$= h\nu \frac{x}{1-x} = h\nu \frac{e^{-h\nu/kT}}{1 - e^{-h\nu/kT}}$$

$$= \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

f.e.d.

$$E_D = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \approx \frac{h\nu}{1 + \frac{h\nu}{kT} - 1}$$

$$= \frac{h\nu}{h\nu/kT} = \underline{\underline{kT}}$$

f.e.d.