LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN I TFY4160/FY1002

4/12 2003

Oppgave 1

a) $$v_f = \frac{\lambda}{T} = \nu\lambda = 16 \cdot 0{,}50 \text{ m/s} = \underline{\underline{8{,}0 \text{ m/s}}}$$

b) Vi har oppgitt:

$$\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2} = K \frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2} \qquad (1)$$

der K er en konstant, og:

$$D(x,t) = D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) \qquad (2)$$

Skal (2) oppfylle (1) må vi ha:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)\right) = K \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-k D_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)\right) = K \frac{\partial}{\partial t}\left(D_0 \omega \sin(kx - \omega t + \varphi)\right)$$

$$-k^2 D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) = -K D_0 \omega^2 \cos(kx - \omega t + \varphi) \qquad (3)$$

Dersom (3) skal være oppfylt for alle x og t må vi ha:

$$\omega^2 = \frac{1}{K} k^2$$

og:

$$\underline{\underline{\omega = \sqrt{1/K}\, k = \text{konstant} \cdot k}} \qquad (4)$$

q.e.d.

c) I følge punkt b må vi ha

$$\omega = \text{konstant} \cdot k$$

for enhver bølge som kan forplante seg på en streng. Det betyr at vi må ha

$$\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} \qquad (5)$$

dersom en bølge som gitt ved ligning (4) i oppgaveteksten skal beskrive en bølge som kan forplante seg på en streng.
Fra oppgitte verdier:

$$\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{2\pi \cdot 10}{2\pi}\ \mathrm{m/s} = 10\ \mathrm{m/s}$$

$$\neq \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{2\pi \cdot 15}{4\pi} = 7{,}5\ \mathrm{m/s}$$

Dvs at den funksjonen som er oppgitt, ikke kan beskrive en bølge som kan forplante seg på en streng

d) $$v_f = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{\gamma}{\rho_1+\rho_2}\right)^{1/2} k^{1/2}$$

$$= \left(\frac{73 \cdot 10^{-3}}{1{,}00 \cdot 10^3 + 1}\right)^{1/2} \left(\frac{2\pi}{0{,}50 \cdot 10^{-3}}\right)^{1/2} \; m/s$$

$$= 0{,}96 \; m/s$$

e) Oppgitt:

$$\omega = \left(\frac{\gamma}{\rho_1+\rho_2}\right)^{1/2} k^{3/2} \qquad (6)$$

som gir:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{\gamma}{\rho_1+\rho_2}\right)^{1/2} k^{1/2}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{\gamma}{\rho_1+\rho_2}\right)^{1/2} \frac{3}{2} k^{1/2}$$

og:

$$\frac{v_f}{v_g} = \frac{2}{3} \qquad (7)$$

f) For situasjon I har vi:

$$\omega = \sqrt{gk} \qquad (8)$$

som gir:

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \qquad (9)$$

som betyr at V_g øker med bølgelengden λ.

<u>Det betyr at mulighet A realiseres.</u>

For situasjon II har vi:

$$\omega = \sqrt{gD}\,k \qquad (10)$$

som gir:

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{gD} \qquad (11)$$

som betyr at V_g er uavhengig λ.

<u>Dermed realiseres mulighet C</u>

For situasjon III har vi:

$$\omega = \left(\frac{\gamma}{\rho_1+\rho_2}\right)^{1/2} k^{3/2} \qquad (12)$$

som gir:

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{\gamma}{\rho_1+\rho_2}\right)^{1/2} \frac{3}{2} k^{1/2} = \frac{3}{2}\left(\frac{\gamma}{\rho_1+\rho_2}\right)^{1/2}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{1/2} \qquad (13)$$

som betyr av V_g minker med økende λ.

<u>Dermed realiseres mulighet B</u>

Oppgave 2

Vi har fra oppgaveteksten:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 A \qquad (1)$$

og fra formelsamlingen for vakuum:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad (2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad (3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (4)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (5)$$

Vi anvender (1) på (4) og får da ved hjelp av (2) og (5):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B})$$

$$\nabla \underbrace{(\nabla \cdot \vec{E})}_{=0} - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

og med $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

$$\underline{\underline{\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}} \quad \text{q.e.d} \qquad (6)$$

Tilsvarende får vi ved å anvende
(1) på (5) og ved hjelp av (3) og (4):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \times \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{E}\right)$$

$$\nabla \underbrace{(\nabla \cdot \vec{B})}_{=0} - \nabla^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

og med $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$

$$\underline{\underline{\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}} \quad \text{q.e.d.} \qquad (7)$$

b) For en dimensjon lyder (6) og (7)

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad (8)$$

og:

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \qquad (9)$$

Vi skal vise at:

$$\vec{E}(x,t) = E_0 \vec{e}_z \cos(kx - \omega t) \qquad (10)$$

og $\vec{B}(x,t) = B_0 \vec{e}_y \cos(kx - \omega t)$ (11)

oppfyller henholdsvis (8) og (9).

10) i (8) gir henholdsvis for venstre og høyre side av (8):

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E_0 \vec{e}_z \cos(kx - \omega t)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[E_0 \vec{e}_z\left(-k \sin(kx - \omega t)\right)\right]$$

$$= \underline{-E_0 \vec{e}_z k^2 \cos(kx - \omega t)}$$

og:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial^2 t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(E_0 \vec{e}_z \cos(kx - \omega t)\right)$$

$$= \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega E_0 \vec{e}_z \sin(kx - \omega t)\right)$$

$$= \frac{1}{c^2}\omega^2\left(-E_0 \vec{e}_z \cos(kx - \omega t)\right)$$

$$= \underline{-E_0 \vec{e}_z k^2 \cos(kx - \omega t)}$$

($\omega/c = k$)

Dvs at høyre side er lik venstre side q.e.d.

Helt likt med $B_0 \vec{e}_y$ isf. $E_0 \vec{e}_z$ vises det at (11) er en løsning av (9).

c) For at en bölge beskrevet ved to bölgefunksjoner som f.eks. gitt ved lign. (10) og (11) skal kunne realiseres i den fysiske virkelighet, er det ikke nok at bölgeligningene (8) og (9) oppfylles. Alle Maxwell's ligningen må oppfylles av bölgefunksjonene.

Vi prøver om $\vec{E}$ og $\vec{B}$ gitt ved lign. (10) og (11) oppfyller ligu (5).

Venstre side:

$$\nabla \times \vec{B} = \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(B_0 \vec{e}_y \cos(kx - \omega t)\right)$$

$$= \vec{e}_x \times \vec{e}_y \left(\frac{\partial}{\partial x} B_0 \cos(kx - \omega t)\right)$$

$$= \vec{e}_z k B_0 \left(-\sin(kx - \omega t)\right)$$

$$= -k \vec{e}_z B_0 \sin(kx - \omega t)$$

Høyre side:

$$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(E_0 \vec{e}_z \cos(kx - \omega t)\right)$$

$$= \varepsilon_0 \mu_0 E_0 \vec{e}_z \omega \sin(kx - \omega t)$$

$$= \frac{1}{c^2} E_0 \vec{e}_z \omega \sin(kx - \omega t$$

$$= \underline{k e_z \frac{E_0}{c} \sin(kx - \omega t)}$$

Siden både E_0, c og B er positive, er ikke venstre side og høyre side like, og bølgen gitt ved ligning (10) og (11) kan derfor ikke realiseres i den fysiske virkelighet.

d) I oppgave 1b er det vist at dersom en bølgeligning av typen

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = \text{konstant} \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}$$

må vi ha at ω/k er lik en konstant. Dette er ikke tilfelle for lys i glass som oppfyller ligning (7) i oppgaveteksten og kvitt lys som forplanter seg i glass oppfyller derfor ikke en bølgeligning av typen gitt ved ligning (8) i oppgaveteksten uansett verdi på C.

Oppgave 3

a) O vil fra sitt referansesystem observere at romskipenes akselerasjon starter samtidig og hele tiden er lik inntil akselerasjonsprogrammene er avsluttet. Sentrene til romskipene har derfor i O sitt referansesystem hele tiden hatt samme hastighet. Avstanden mellom dem har dermed også alltid vært den samme og er det også etter at akselerasjonsprogrammet er avsluttet, dvs:

$$\underline{\underline{A_S = A_B}}$$

O observerer imidlertid at romskipenes lengde endres fra L_B i begynnelsestilstanden til L_S i slutttilstanden med følgende sammenheng mellom L_B og L_S:

$$L_S = L_B/\gamma \quad \text{der} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Med slutthastighet $v = \frac{7}{25}c$ i O sitt referansesystem finner vi:

$$L_S = L_B\sqrt{1-(\tfrac{7}{25})c^2/c^2} = L_B\frac{\sqrt{576}}{25} = \underline{\underline{\frac{24}{25}L_B}}$$

(Se ligning (65) og (67) i formelsamlingen vedlagt eksamensoppgaven.)

b) Etter akselerasjonen kommer de to romskipene til ro i O' sitt referansesystem S'. Avstanden mellom romskipene, A_S', målt av O', må samsvare med avstanden A_S målt av O, når det tas hensyn til at O beveger seg med hastighet $-\frac{7}{25}c$ i forhold til O'. Fra lign. (67) i formelsamlingen får vi da (med $\gamma = \frac{25}{24}$)

$$A_S = A_S'/\gamma \Rightarrow A_S' = \gamma A_S = \frac{25}{24} A_S = \underline{\underline{\frac{25}{24} A_B}}$$

Samme argumentasjon kan nyttes til å finne lengden til romskipene L_S' observert av O' etter at de har kommet til ro i hans referansesystem:

$$L_S = L_S'/\gamma \Rightarrow L_S' = \gamma L_S = \frac{25}{24}\left(\frac{24}{25} L_B\right) = \underline{\underline{L_B}}$$

Dette resultatet kan innses enklere uten regning ved å konstatere at egenlengden til et fysisk legeme er uendret. Lengden O' måler etter at romskipene er kommet til ro i hans referansesystem må derfor være den samme som O målte <u>før</u> akselerasjonen i sitt referansesystem.

Avstanden mellom romskipene A_B' i begynnelsestilstanden observert av O' må samsvare med avstanden L_B observert av O når det tas hensyn til den relative hastigheten observatørene har til hverandre. På samme vis som ovenfor finner vi at:

$$A_B' = A_B/\gamma = \underline{\underline{\frac{24}{25} A_B}}$$

Lengden L_B' som O' måler finnes på samme måte:

$$L_B' = L_B/\gamma = \underline{\underline{\frac{24}{25} L_B}}$$

Merk: O' vil observere at romskipenes lengde endres fra $\frac{24}{25} L_B$ før akselerasjonen til L_B etter at de har kommet til ro i hans referansesystem S', altså samme lengde som O observerte mens de var i ro i S (egenlengden).

Avstanden mellom romskipene observert av O', endres imidlertid fra $\frac{24}{25} A_B$ før noen av romskipene har begynt å akselerere til $\frac{25}{24} A_B$ etter at de har kommet til ro i S'. Dette kommer av at avstanden mellom romskipene <u>ikke</u> representerer et fysisk (stivt) legeme slik tilfellet er for romskipenes lengde.
Avstanden mellom romskipene målt av O i S og O' i S' før akselerasjonen forholder seg imidlertid til hverandre gjennom Lorentz-transformasjonen. Også avstanden i S og S' etter at akselerasjonen er avsluttet forholder seg til hverandre gjennom Lorentz-transformasjonen.