

1

Examen i TFF 4160 / FY 1002 höst 2005
Lösningsskildring

Öppning 1

- a) 2 riktningar - d.v.s. i planet
ortogonalt på bevegelsesretningen.
(-g alle kombinasjoner av disse
2 riktningene.)
- b) $v_f = \sqrt{\frac{1}{\kappa}} = \sqrt{\frac{F_r}{\mu}}$

$$\underline{v_f = \frac{g}{k} = \frac{\omega}{k} = \lambda v = 0,8 \text{ m/s}}$$

- c) $\omega(k) = \sqrt{\frac{1}{\kappa}} k$, $\underline{v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{1}{\kappa}} = v_f}$
 v_g er uavhengig av $k \Rightarrow$ ingen
dispersjon.

~~Antar nå~~ $\mu(v) = \frac{\mu_0}{1 + (v_0/v)^2} = \frac{\mu_0}{1 + \left(\frac{2\pi v_0}{\omega}\right)^2}$

(Dispersjonsrelasjonen blir da:

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{1}{\kappa}} k = \sqrt{\frac{F_r}{\mu(k)}} k = \sqrt{\frac{F_r}{\mu_0}} k \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi v_0}{\omega(k)}\right)^2}$$

Dette gir nå man løser for $\omega = \omega(k)$:

$$\left(\omega(k) - \frac{1}{2} k^2 \frac{F_r}{\mu_0}\right)^2 = \frac{1}{4} \left(k^2 \frac{F_r}{\mu_0}\right)^2 + k^2 \frac{F_r}{\mu_0} (2\pi v_0)^2$$

Skum der positive roten er positiv:

$$\underline{\omega^2(k) = \frac{F_r}{\mu_0} k^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{16\pi^2 \mu_0 v_0^2}{F_r k^2}} \right]}$$

↑
Hake pynte.

- d) Jo forkke strukturen, jo mindre vann kondensere på den. Vi forventer derfor

$$\underline{v_g \rightarrow v_f = \sqrt{\frac{F_T}{\mu_0}} \text{ når } k \rightarrow \infty.}$$

(Det er også da det vi finner når vi bruker uttrykket for $\omega = \omega(k)$ $\rightarrow \sqrt{\frac{F_T}{\mu_0}} k$ når $k \rightarrow \infty$.)

Oppgave 2

- a) Maxwells ligninger i vakuum:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 & (1) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 & (2) \quad (\rho = 0, \vec{j} = \vec{0}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (3) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (4) \end{cases}$$

Ligning (3): $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B})$

Ligning (4): $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$

Ligning (1): $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_0) - \nabla^2 \vec{E} = - \nabla^2 \vec{E}$

$$\Rightarrow \boxed{\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = \nabla^2 \vec{E}} \quad \epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Samme fremgangsmåte for $\vec{B}$ gir $\underline{\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} = \nabla^2 \vec{B}.}$

- b) Bevegeelsesretningen til en planbølge er ortogonalt til planene hvor fasene er konstant.

$$\text{Fasene er for } \vec{E}, \quad \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_E.$$

$$\text{Fasene er for } \vec{B}, \quad \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_B.$$

Endre vi $\vec{r}$ til $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ hvor $\Delta\vec{r} \perp \vec{k}$, vil $\vec{k} \cdot (\vec{r} + \Delta\vec{r}) = \vec{k} \cdot \vec{r}$. Altså forblir fasene konstant både for $\vec{E}$ og $\vec{B}$. $\Rightarrow$ Forplantningsretningen til bølgene er $\vec{k}/|\vec{k}|$.

- c) Maxwells 1. ligning er i vakuum $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$.
Sætter vi $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_E)$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{k} \cdot \vec{E}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_E) = 0$$

Alt dette er sant for alle verdier av fasen

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{B}_0$$

pi samme måte.

$$\boxed{\vec{k} \perp \vec{E}_0} \Rightarrow$$

Longitudinelle lysbølger finnes ikke.

- d) Vi viser først at fasene til $\vec{E}$ og $\vec{B}$ er like.

Vi velger et punkt $\vec{r}$ i rommet.

$\vec{B}$ -Bølgen er et skemal (maksimal eller minimal) når

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

Opnået Maxwell's ligning (3), har vi da at $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ på dette tilspidspunkt og på dette skedil også er et skemal. Altså er $\phi_E = \phi_B$. $\vec{E}$ og $\vec{B}$ har samme fase:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)$$

Sette dette udtrykket ind i Maxwell's (3) og (4) ligninger:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \vec{B}_0 \\ \vec{k} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E}_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_0 \perp \vec{B}_0}$$

e) Benyttes nu at $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$ og at $\omega/k = c$ hvor $k = |\vec{k}|$.

$$\left. \begin{array}{l} |\vec{k} \times \vec{E}_0| = k E_0 = \omega |\vec{B}_0| = \omega B_0 \Rightarrow E_0 = \frac{\omega}{k} B_0 \\ |\vec{k} \times \vec{B}_0| = k B_0 = \frac{\omega}{c^2} |\vec{E}_0| = \frac{\omega}{c^2} E_0 \Rightarrow B_0 = \frac{1}{c} E_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{E = c B}$$

$$\left. \begin{array}{l} E = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \\ B = B_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{E = c B}$$

Oppgave 3

a) $ct = 2,99795 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 10^{-6} \text{ s} = \underline{299,795 \text{ m}}$

b) Vi har to event. Δx måler avstanden mellom dem og Δt tidsforskjellen mellom dem i laboratorisystemet. $\Delta x'$ og $\Delta t'$ gir det samme i rokkssystemet. Lorentz-transformasjonene binder dem sammen.

c) Lengden av staven måles ved samme tid i laboratorisystemet.

$$l = \Delta x, \Delta t = 0$$

$$\Delta t = 0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (v \Delta x' + \Delta t') \Rightarrow \Delta t' = -v \Delta x'$$

$$\Delta x = l = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (\Delta x' + v \Delta t') = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (\Delta x' - v^2 \Delta x')$$

$$v = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{l = \frac{\sqrt{3}}{2} l'} = \sqrt{1-v^2} \Delta x' = \sqrt{1-v^2} l'$$

d) Bruken Lorentz-transformasjonene igjen:

$$\Delta x = l_e = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} [\Delta x' + v \Delta t']$$

$$\Delta t = 0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} [v \Delta x' + \Delta t'] \Rightarrow \Delta t' = -v \Delta x'$$

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} [\Delta x' + v \Delta t'] = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} [1 - v^2] \Delta x' = \sqrt{1-v^2} \Delta x'$$

$$\Rightarrow \Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{l_e}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$\text{Svaret er altså } \underline{\underline{\Delta t' = -v \Delta x' = -\frac{v l_e}{\sqrt{1-v^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} l_e}}$$

(Jeg kom i skade for å sette $\Delta x' = l'$ i oppgaven. Det skulle vært $\Delta x'$. Jeg har rimeligvis godlynt de som har regnet med l' i stedet for l_e .)

e) Fjorste luke lukkes før lakeu lukke.

f) Bakenden av skinn er forrest utkjapt bakover
når fjorste luke lukkes. Bakende luke
lukkes først når denne enden av skinn
er inne i bakken. Da kan fjorsten
allerede holdes med innsiden av bakken
svis man ikke har åpnet igjen
fjorste luke.
