

Utarbeidet av: Jon Andreas Støvneng

LØSNINGSFORSLAG (8 sider) TIL EKSAMEN I FY1002 og TFY4160 BØLGEFYSIKK  
Fredag 3. desember 2010 kl. 0900 - 1300**OPPGAVE 1** [telte 16 %]a

•

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

• Innsetting av den oppgitte formen på  $x(t)$  i bevegelsesligningen gir to ligninger (en proporsjonal med  $\sin \omega t$  og en proporsjonal med  $\cos \omega t$ ) som grunnlag for å bestemme  $\tau$  og  $\omega$ . Vi gjør ikke det her, men setter alternativt en ”prøveløsning”  $\exp(-zt)$  inn i bevegelsesligningen. Det gir ”karakteristisk” ligning

$$mz^2 - bz + k = 0,$$

med løsninger

$$z = \frac{b}{2m} \pm i \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2},$$

siden dempingen er oppgitt å være svak. En løsning for  $x(t)$  som er konsistent med disse verdiene av  $z$  er

$$x(t) = x_0 e^{-t/\tau} \cos \omega t,$$

med  $\tau = 2m/b$ .

• ... og  $\omega = \sqrt{k/m - (b/2m)^2}$ . Siden oppgaven spesifiserer svak dempning, er det også helt greit å slå fast at  $\omega \simeq \sqrt{k/m}$ .

b

• Total energi  $E(t)$  kan f.eks settes lik potensiell energi  $E_p(nT)$  der  $T$  er perioden og  $n = 0, 1, 2, \dots$ , dvs ved tidspunkter  $nT$  som tilsvarer at massen har maksimalt positivt utsving. Der snur massen, slik at kinetisk energi er null, og  $E = E_p$ . Ved disse tidspunktene er  $\cos \omega t = \cos n\omega T = 1$ . Videre er

$$E_p(nT) = \frac{1}{2} k x_0^2 e^{-2nT/\tau}.$$

Dermed har vi

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{E} &= \frac{E_p(nT) - E_p((n+1)T)}{E_p(nT)} \\ &= 1 - e^{-2T/\tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\simeq 1 - (1 - (-2T/\tau)) \\
&= 2T/\tau \\
&= 2\pi b/\omega m
\end{aligned}$$

Systemets  $Q$ -verdi blir altså

$$Q = 2\pi E/\Delta E = \underline{\omega m/b \simeq \omega_0 m/b = \sqrt{km}/b},$$

der vi helt til slutt brukte opplysningen om meget svak demping.

## OPPGAVE 2 [telte 8 %]

- Lydhastigheten i en gitt gass avhenger kun av temperaturen. Hvis temperaturen i utgangspunktet er  $T_0$ , har vi (fra formelarket)

$$v_0 = \sqrt{\gamma k_B T_0 / m},$$

der  $\gamma$  er adiabatkonstanten, her lik  $5/3$  (enatomige molekyler),  $k_B$  er Boltzmanns konstant, og  $m$  er massen til atomene.

For å finne lydhastigheten  $v_1$  etter at gassen har ekspandert adiabatisk slik at trykket er halvert, benytter vi oss av at  $pV^\gamma$  er konstant under adiabatiske prosesser, samt at gassen er ideell, slik at  $pV = Nk_B T$ . Her er  $N$  antall atomer i et volum  $V$  av gassen.

Ideell gass innebærer at

$$p_0 V_0 = Nk_B T_0 \quad , \quad p_1 V_1 = Nk_B T_1,$$

dvs

$$T_1/T_0 = p_1 V_1 / p_0 V_0 = V_1 / 2V_0,$$

der vi brukte at  $p_1 = p_0/2$ . Adiabatisk utvidelse betyr at

$$p_0 V_0^\gamma = p_1 V_1^\gamma,$$

dvs

$$V_1/V_0 = (p_0/p_1)^{1/\gamma} = 2^{1/\gamma}.$$

Vi setter dette inn i uttrykket for temperaturforholdet og får

$$T_1/T_0 = 2^{1/\gamma}/2 = 2^{-2/5}.$$

Dermed:

$$v_1 = \sqrt{\gamma k_B T_1 / m} = \sqrt{(\gamma k_B T_0 / m) \cdot 2^{-2/5}} = \underline{v_0 \cdot 2^{-1/5} \simeq 0.87 v_0}.$$

## OPPGAVE 3 [telte 8 %]

- Diffraksjon og interferens med  $N$  meget smale spalter gir opphav til hovedmaksima med  $N - 2$  bimaksima mellom to påfølgende hovedmaksima. Her har vi 6 slike bimaksima, så  $N = 8$ . Ved 1. ordens hovedmaksimum har vi

$$\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta = \pi,$$

slik at

$$d = \frac{\lambda}{\sin \theta} \simeq \frac{\lambda}{\theta} = \frac{500 \cdot 10^{-9}}{0.005} \text{ m} = \underline{10^5 \text{ nm} = 0.1 \text{ mm} = 10^{-4} \text{ m}}.$$

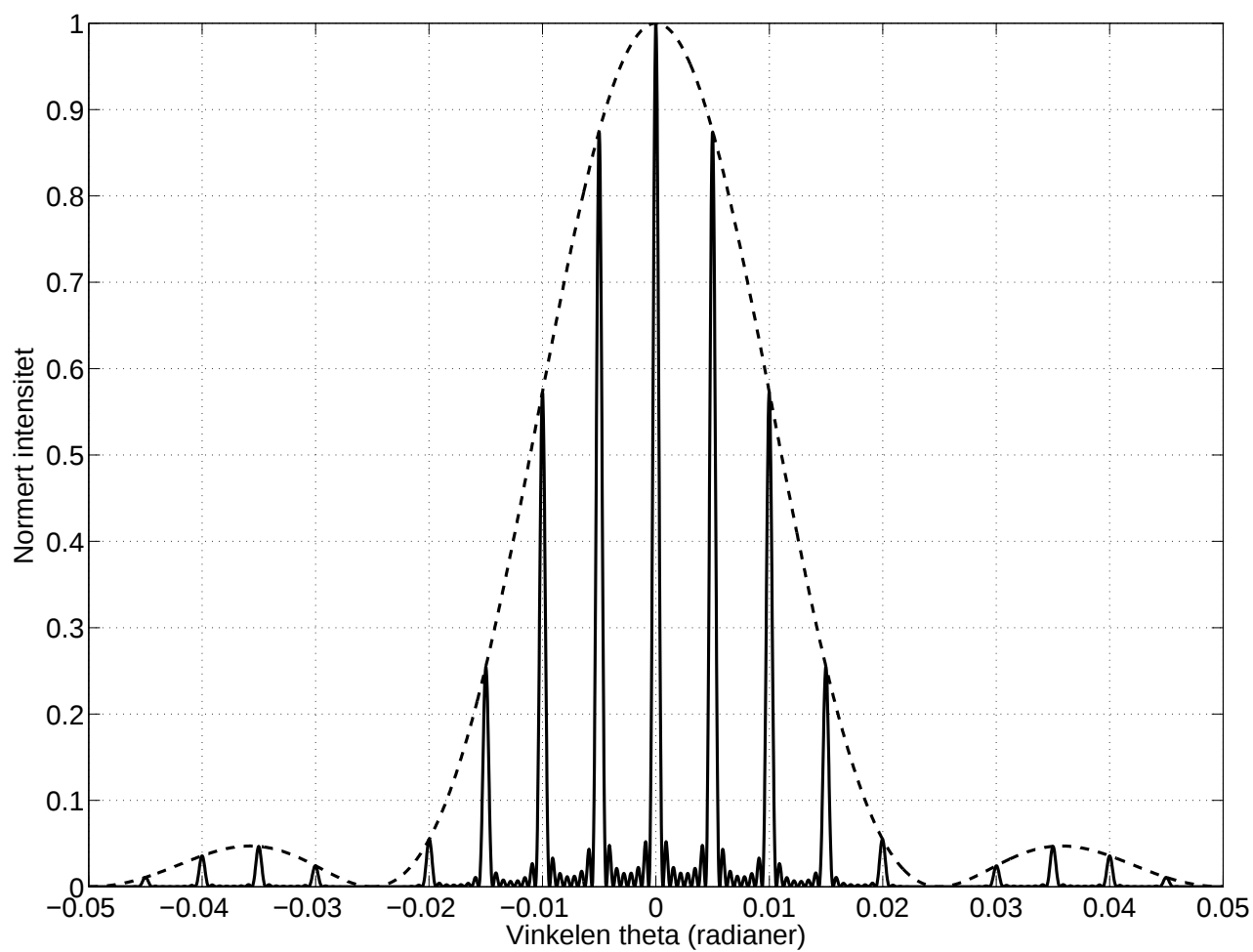
- Spaltebredde  $a = d/5 = 0.02 \text{ mm}$  gir  $n$ -te nullpunkt i diffraksjonsfaktoren  $\sin^2 \beta / \beta^2$  ved

$$\beta = \pi a (\sin \theta) / \lambda = \pm n\pi,$$

dvs

$$\theta \simeq \pm n\lambda / a = \pm 5n\lambda / d = \pm 0.025n,$$

der  $n = 1, 2, \dots$ . Diffraksjonsfaktoren vil framstå som en omhylningskurve for interferensmønsteret i oppgaveteksten:



#### OPPGAVE 4 [telte 16%]

a

- Tyngdeleddet  $gk$  og overflatespenningsleddet  $\gamma k^3/\rho$  er like store når  $k = k_0 = \sqrt{g\rho/\gamma}$ , dvs

$$\lambda_0 = 2\pi/k_0 = 2\pi\sqrt{\gamma/g\rho} \simeq \underline{0.017\text{ m} = 1.7\text{ cm}}.$$

Vi kan benytte dette resultatet i resten av oppgaven: Dersom bølgelengden er mye større enn  $\lambda_0$ , kan vi neglisjere overflatespenningsleddet i dispersjonsrelasjonen, og vi har såkalte tyngdebølger. Omvendt, dersom bølgelengden er mye mindre enn  $\lambda_0$ , kan vi neglisjere tyngdeleddet i dispersjonsrelasjonen, og vi har såkalte kapillærbølger.

- Med  $\lambda$  i området 0.2 til 2.0 m har vi bare tyngdebølger, så vi kan med god tilnærmelse bruke  $\omega(k) = \sqrt{gk}$ , slik at gruppehastigheten blir  $v_g = d\omega/dk = \sqrt{g/4k} = \sqrt{\lambda g/8\pi}$ . Vi ser at gruppehastigheten øker med økende bølgelengde. Den raskeste delen av bølgepakken har derfor hastighet  $v_g = \sqrt{2.0 \cdot 9.8/8\pi} \simeq 0.88\text{ m/s}$ . Tid brukt fra båten inn til land er da  $t = 50/0.88 \simeq \underline{57}$  sekunder.
- Den langsomste delen av bølgepakken har  $\lambda = 0.2\text{ m}$ , som gir en økning i tidsbruken med en faktor  $\sqrt{10}$  i forhold til de raskeste, med andre ord  $t \simeq \underline{179}$  sekunder.

b

- Gruppehastigheten er

$$v_g = \frac{d\omega}{dk},$$

og vi skal bestemme de to mulige bølgelengdene  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  som gir  $v_g = 1.0\text{ m/s}$ . Det er oppgitt at  $\lambda_1$  er ”meget kort”, noe som burde motivere for å neglisjere tyngdeleddet i dispersjonsrelasjonen. Vi prøver:

$$\begin{aligned} v_g &= \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{k_1} = \sqrt{\frac{9\pi\gamma}{2\rho\lambda_1}} \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \frac{9\pi\gamma}{2\rho v_g^2} \simeq \underline{1.0\text{ mm}}. \end{aligned}$$

Vi ser at  $\lambda_1$  ble mye mindre enn  $\lambda_0 = 17\text{ mm}$ , så tilnærmingen vi brukte fra starten av var i orden.

Det er videre oppgitt at  $\lambda_2$  er ”forholdsvis lang”, så vi satser på at vi nå kan neglisjere overflatespenningsleddet i dispersjonsrelasjonen:

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k_2}} = \sqrt{\frac{g\lambda_2}{8\pi}} \\ \Rightarrow \lambda_2 &= \frac{8\pi v_g^2}{g} \simeq \underline{2.6\text{ m}}. \end{aligned}$$

Vi ser at  $\lambda_2$  ble mye større enn  $\lambda_0 = 17\text{ mm}$ , så tilnærmingen vi brukte her var også i orden.

**OPPGAVE 5** [telte 16 %]

**a** • Fra figuren ser vi at

$$\sin \theta_B = \frac{h_B}{r},$$

der  $\theta_B$  er innfallsvinkelen når  $h = h_B$ . Vi må derfor finne et uttrykk for  $\sin \theta_B$ .

Vi ser at  $\alpha = \beta$  gir  $R_p = 0$ , dvs ved denne innfallsvinkelen vil den reflekterte strålen være fullstendig polarisert normalt på innfallsplanet. Vi skal komme tilbake til dette i punkt **b**. Med  $\alpha = \beta$  har vi

$$\frac{\cos \phi}{\cos \theta_B} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} = n.$$

Her har vi satt innfallsvinkelen  $\theta_1$  lik  $\theta_B$  og brytningsvinkelen  $\theta_2$  lik  $\phi$ . Vi trenger en ligning til for å fastlegge de to ukjente,  $\phi$  og  $\theta_B$ , og da er det vel nærliggende å ty til Snells lov:

$$1 \cdot \sin \theta_B = n \sin \phi.$$

Vi er på jakt etter et uttrykk for  $\sin \theta_B$ , så vi må eliminere  $\phi$  fra de to ligningene. Fra Snells lov har vi

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \sin^2 \phi} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \theta_B}.$$

Fra den første ligningen har vi

$$\cos \phi = n \cos \theta_B = n \sqrt{1 - \sin^2 \theta_B}.$$

Vi setter de to uttrykkene for  $\cos \phi$  lik hverandre, kvadrerer og løser med hensyn på  $\sin^2 \theta_B$ :

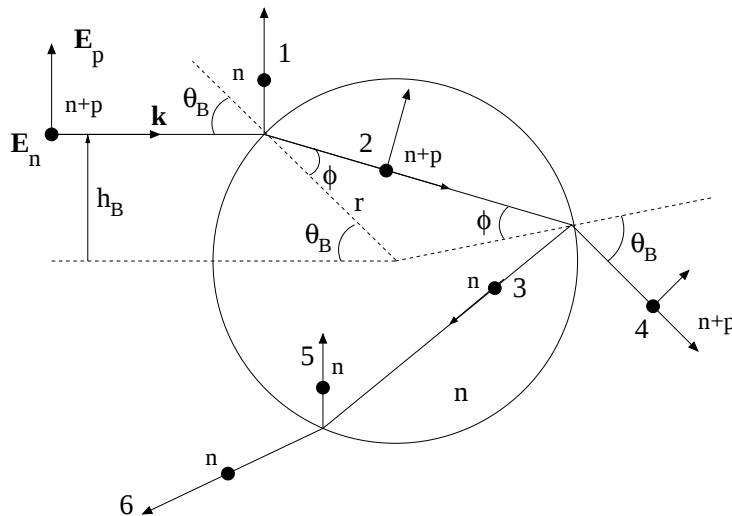
$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{n^2} \sin^2 \theta_B &= n^2 (1 - \sin^2 \theta_B) \\ \Rightarrow \left( n^2 - \frac{1}{n^2} \right) \sin^2 \theta_B &= n^2 - 1 \\ \Rightarrow \sin^2 \theta_B &= \frac{n^2 - 1}{n^2 - 1/n^2} = \frac{n^2 - 1}{(n^4 - 1)/n^2} = n^2 \frac{n^2 - 1}{(n^2 - 1)(n^2 + 1)} = \frac{n^2}{n^2 + 1} = \frac{1}{1 + 1/n^2} \end{aligned}$$

Dette gir

$$h_B = \frac{r}{\sqrt{1 + 1/n^2}}.$$

Vannkule med  $n \simeq 1.34$  gir  $\theta_B \simeq 53.3^\circ$ .

(På denne oppgaven kan en alternativt starte direkte fra  $\tan \theta_B = n$ , eventuelt andre sammenhenger som en kjenner til for Brewsters vinkel.)

b

• Vi slo ovenfor fast at  $R_p = 0$  for den innkommende strålen som treffer kula og ”deler seg” i banene 1 og 2. Dermed er det klart at stråle 1 er polarisert normalt på innfallsplanet ( $n$ ), mens stråle 2 inneholder både  $n$  og  $p$ . Vi ser nærmere på stråle 2 som reflekteres (3) og transmitteres/refrakteres (4) i grenseflaten mot luft. Med notasjonen i det som er oppgitt i oppgaveteksten, har vi nå en innfallsvinkel  $\theta_1 = \phi$ , mens brytningsvinkelen er  $\theta_2 = \theta_B$ . Dermed er  $\alpha = \cos \theta_B / \cos \phi$  og  $\beta = v_1/v_2 = n_2/n_1 = 1/n$  (ettersom medium 1 nå er inne i kula, der brytningsindeksen er  $n$ ). I punkt **a** hadde vi sammenhengen  $\cos \phi = n \cos \theta_B$ , og det må jo selvsagt fortsatt holde. Dermed har vi nå  $\alpha = 1/n = \beta$ . Med andre ord: Stråle 2 treffer grenseflaten akkurat på Brewsters vinkel, slik som den innkommende strålen gjorde! Det betyr at vi også nå har  $R_p = 0$ , slik at stråle 3 blir fullstendig polarisert normalt på innfallsplanet ( $n$ ), mens stråle 4 inneholder både  $n$  og  $p$ . Med kun polarisasjon  $n$  i stråle 3 er det klart at også strålene 5 og 6 kun kan ha polarisasjon  $n$ .

Oppsummert:

$$1:n \quad 2:p+n \quad 3:n \quad 4:p+n \quad 5:n \quad 6:n.$$

### OPPGAVE 6 [telte 16 %]

a

$$T_{\text{Newton}} = \frac{1}{2}mv^2 \quad , \quad T_{\text{Einstein}} = E - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2,$$

der  $E$  er partikkelens totale energi og  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  er lorentzfaktoren.

- Når  $v/c \ll 1$ , blir lorentzfaktoren med god tilnærmelse

$$\gamma \simeq 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2},$$

slik at

$$T_{\text{Einstein}} \simeq (1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - 1) mc^2 = \frac{1}{2} mv^2.$$

• Vi må her ta med ett ledd til i rekkeutviklingen av  $\gamma$ , og med det som er oppgitt på 1. side av oppgaveteksten har vi

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 \dots,$$

som gir

$$T_{\text{Einstein}} = mc^2 (\frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 \dots) = \frac{1}{2} mv^2 (1 + \frac{3}{4} \beta^2 \dots).$$

Det betyr at  $a_1 = 0$  og  $a_2 = 3/4$ .

## **b**

• I lab-systemet ( $S_0$ ) er total impuls lik null, mens total energi er

$$E_0 = 2mc^2 + 2T.$$

I systemet  $\tilde{S}$  ligger ett av de to elektronene i ro, mens det andre har impuls  $\tilde{p}$  og kinetisk energi  $\tilde{T}$ . Total energi i  $\tilde{S}$  er derfor

$$\tilde{E} = 2mc^2 + \tilde{T},$$

mens total impuls er  $\tilde{p}$ .

Uavhengig av hvilket inertialsystem vi gjør målingene i, vil kombinasjonen

$$E^2 - p^2 c^2$$

(der  $E$  og  $p$  er hhv total energi og total impuls) ha samme verdi, dvs den er en såkalt *invariant*. Vi kjenner verdien av denne kombinasjonen i ett inertialsystem, nemlig  $S_0$ , der total energi er  $E_0 = 2mc^2 + 2T$  og total impuls er null. Dermed har vi sammenhengen

$$E^2 - p^2 c^2 = E_0^2 = (2mc^2 + 2T)^2.$$

Videre, hvis vi ser på det ene elektronet som beveger seg i systemet  $\tilde{S}$ , så har dette energi

$$\tilde{E}_1 = mc^2 + \tilde{T},$$

og dessuten må sammenhengen

$$\tilde{E}_1^2 = \tilde{p}^2 c^2 + m^2 c^4$$

gjelde. Dermed har vi for dette elektronets impuls:

$$\tilde{p}^2 c^2 = \tilde{E}_1^2 - m^2 c^4 = (mc^2 + \tilde{T})^2 - m^2 c^4 = 2mc^2 \tilde{T} + \tilde{T}^2.$$

Vi bruker nå invarians av  $E^2 - p^2 c^2$  og setter denne kombinasjonen i  $\tilde{S}$  lik den tilsvarende i  $S_0$ :

$$\begin{aligned} \tilde{E}^2 - \tilde{p}^2 c^2 &= E_0^2 \\ \Rightarrow (2mc^2 + \tilde{T})^2 - (2mc^2 \tilde{T} + \tilde{T}^2) &= (2mc^2 + 2T)^2 \\ \Rightarrow 2mc^2 \tilde{T} &= 8mc^2 T + 4T^2 \\ \Rightarrow \tilde{T} &= \underline{4T \left( 1 + \frac{T}{2mc^2} \right)} \end{aligned}$$

• I den ikke-relativistiske grensen  $T \ll mc^2$  kan vi neglisjere leddet  $T/2mc^2$  i forhold til 1. Dermed er

$$\tilde{T} \simeq 4T.$$

Dette er ikke uventet: Med ikke-relativistisk mekanikk har vi  $T = mv^2/2$  og  $\tilde{T} = m \cdot (2v)^2/2 = 2mv^2$  ettersom elektronet i bevegelse har den doble hastigheten  $2v$  i referansesystemet der det andre ligger i ro. Altså er  $\tilde{T} = 4T$ , som funnet.

• Dersom vi kun akselererer det ene elektronet, må dette akselereres til en hastighet som nettopp tilsvarer  $\tilde{T} = 10^{12} \text{ eV} = 10^6 \text{ MeV}$ . Men dersom vi akselererer de to elektronene i motsatt retning, må de bare akselereres til hastigheter som tilsvarer kinetisk energi  $T$ , gitt ved ligningen

$$\tilde{T} = 4T \left( 1 + \frac{T}{2mc^2} \right).$$

Siden  $mc^2 = 0.5 \text{ MeV}$ , ser vi at verdien for  $T$  må bli mye større enn  $mc^2$ , så vi kan med god tilnærming skrive

$$\tilde{T} = \frac{2T^2}{mc^2},$$

som gir (med alle energier,  $T$ ,  $mc^2$  og  $\tilde{T}$  i enheten MeV)

$$T = \sqrt{mc^2 \tilde{T}/2} = \sqrt{0.5 \cdot 10^6/2} = 500 \text{ MeV}.$$

Dette er bare 1/2000 av påkrevd kinetisk energi når bare det ene elektronet akselereres. Dette poenget utnyttes i alle moderne partikkelakseleratorer ("colliders").

Alternativt, for 1. kulepunkt, med bruk av firerimpuls:

$$\begin{aligned} p^\alpha p_\alpha &= \tilde{p}^\alpha \tilde{p}_\alpha \\ \Rightarrow 4E^2/c^2 &= \left( \frac{\tilde{E} + mc^2}{c} \right)^2 - \tilde{p}^2 \\ &= \frac{\tilde{E}^2 + 2mc^2 \tilde{E} + m^2 c^4}{c^2} - (\tilde{E}^2/c^2 - m^2 c^2) \\ &= 2m\tilde{E} + 2m^2 c^2 \\ \Rightarrow \tilde{E} &= 2E^2/mc^2 - mc^2 \\ \Rightarrow \tilde{T} + mc^2 &= \frac{2(T + mc^2)^2}{mc^2} - mc^2 \\ &= \frac{2T^2}{mc^2} + 4T + mc^2 \\ \Rightarrow \tilde{T} &= 4T \left( 1 + T/2mc^2 \right) \end{aligned}$$

Forklaring: Her er  $E = T + mc^2$  energien til *hvert* av de to elektronene, målt i labsystemet, slik at  $p^\alpha = (2E/c, 0, 0, 0)$  blir total firerimpuls i labsystemet, noe som gir  $p^\alpha p_\alpha = 4E^2/c^2$ . Videre er  $\tilde{E} = \tilde{T} + mc^2$  energien til det ene elektronet i bevegelse, målt i det andre elektronets hvilesystem. Total energi i dette inertialsystemet blir dermed  $\tilde{E} + mc^2$ , slik at  $\tilde{p}^\alpha \tilde{p}_\alpha = ((\tilde{E} + mc^2)/c)^2 - \tilde{p}^2$ , med  $\tilde{p}^2$  lik kvadratet av (treer-)impulsen, slik at  $\tilde{E}^2 = \tilde{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ , dvs  $\tilde{p}^2 = \tilde{E}^2/c^2 - m^2 c^2$ .