

FY1002/TFY4160 Bølgefysikk

Løsningsforslag til Midtsemesterprøve fredag 15. oktober 2010 kl 08.15 – 09.45

Fasit på side 10.

Oppgavene og et kortfattet løsningsforslag:

1) Vi betrakter en transversal harmonisk bølge på en streng, med amplitude 1 mm, bølgelengde 40 cm og frekvens (f) 100 Hz. Hva er fasehastigheten til en slik bølge?

- A 40 m/s
- B 40 cm/s
- C 1 mm/s
- D 63 cm/s

$$v = \lambda/T = \lambda f = 0.40 \cdot 100 \text{ m/s} = 40 \text{ m/s}$$

A

2) For den svingende strengen i oppgave 1, hva blir maksimal (transversal) hastighet for et strenelement?

- A 40 m/s
- B 40 cm/s
- C 1 mm/s
- D 63 cm/s

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t) \Rightarrow \dot{y} = -\omega y_0 \cos(kx - \omega t) \\ \Rightarrow \dot{y}_{\max} = \omega y_0 = 2\pi \cdot 100 \cdot 0.001 \text{ m/s} \simeq 0.63 \text{ m/s}$$

D

3) På en streng med lengde 2 m og masse 25 g forplanter transversale bølger seg med hastighet 100 m/s. Hva stor er strekk-kraften i strengen?

- A 50 N
- B 75 N
- C 100 N
- D 125 N

$$S = \mu v^2 = (0.025/2) \cdot 100^2 = 125 \text{ N}$$

D

4) Strengen i oppgave 3 er festet i begge ender. Hvilken frekvens har grunntonen?

- A 10 Hz
- B 25 Hz
- C 75 Hz
- D 125 Hz

$$\lambda_1 = 2L = 4 \text{ m} \Rightarrow f_1 = v/\lambda_1 = 100/4 = 25 \text{ Hz}$$

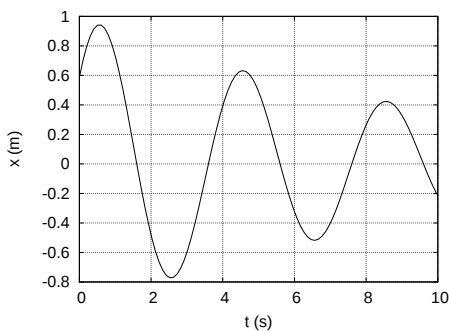
B

5) En kloss med masse m ligger på et bord og er festet til ei ideell fjær med fjærkonstant k . Friksjonskoeffisientene mellom kloss og bord er μ_s (statisk) og μ_k (kinetisk). Klossen trekkes en avstand A ut fra likevekt (slik at fjæra strekkes) og slippes med null starthastighet. Hvilke(t) krav må vi stille til A for at klossen skal begynne å svinge fram og tilbake?

- A Vi må ha $A > \mu_s mg/k$.
- B Vi må ha $A < \mu_s mg/k$.
- C Vi må ha $A > gk/\mu_s m$.
- D Ingen.

Fjærkraften kA må overstige maksimal friksjonskraft $\mu_s mg$. Altså: $A > \mu_s mg/k$.

A



6) Figuren ovenfor viser en dempet svingning der utsvinget er gitt som

$$x(t) = Ae^{-t/\tau} \cos(\omega t + \phi).$$

Hva er initialverdiene $x(0)$ og $\dot{x}(0)$ for dette svingeforløpet?

- A $x(0) \simeq 60 \text{ cm}$, $\dot{x}(0) \simeq -120 \text{ cm/s}$
- B $x(0) \simeq -60 \text{ cm}$, $\dot{x}(0) \simeq 120 \text{ cm/s}$
- C $x(0) \simeq 60 \text{ cm}$, $\dot{x}(0) \simeq 120 \text{ cm/s}$
- D $x(0) \simeq -60 \text{ cm}$, $\dot{x}(0) \simeq -120 \text{ cm/s}$

Vi ser direkte fra grafen at $x(0) \simeq 60 \text{ cm}$ og at $\dot{x}(0) > 0$ (positiv helning på kurven i $t = 0$).

C

7) Anslå den karakteristiske dempingstiden τ i uttrykket for $x(t)$ i oppgave 6 (med utgangspunkt i figuren ovenfor).

- A $\tau \simeq 4 \text{ s}$
- B $\tau \simeq 7 \text{ s}$
- C $\tau \simeq 10 \text{ s}$
- D $\tau \simeq 13 \text{ s}$

Fra grafen ser vi at $T \simeq 4 \text{ s}$. Første topp-punkt er $x_1 \simeq 0.95 \text{ m}$ og tredje topp-punkt er $x_3 \simeq 0.42 \text{ m}$. Dermed:

$$\frac{x_3}{x_1} \simeq \frac{0.42}{0.95} = e^{-2T/\tau}$$

som gir

$$\tau \simeq \frac{2T}{\ln(0.95/0.42)} \simeq 9.8 \text{ s} \simeq 10 \text{ s}$$

C

8) Vi betrakter fri svingninger i en enkel udempet endimensjonal harmonisk oscillator, mer presist en masse m festet til ei ideell fjær med fjærkonstant k . Hvilken av påstandene nedenfor er da *feil*?

- A Den totale mekaniske energien endrer seg ikke med tida.
- B Den kinetiske energien oscillerer med periode $2\pi\sqrt{m/k}$.
- C En dobling av massen reduserer svingefrekvensen med i underkant av tredve prosent.
- D Massens utsving fra likevekt og dens akselerasjon er i motfase.

Påstand B er feil. Hvis x , og dermed $\dot{x}$, en harmonisk funksjon med vinkelfrekvens ω , vil kinetisk energi E_k , som er proporsjonal med $\dot{x}^2$, bli en harmonisk funksjon med vinkelfrekvens 2ω . (Eks: $\sin^2(\omega t) = (1 - \cos 2\omega t)/2$) E_k oscillerer dermed med perioden $2\pi/2\omega = \pi\sqrt{m/k}$.

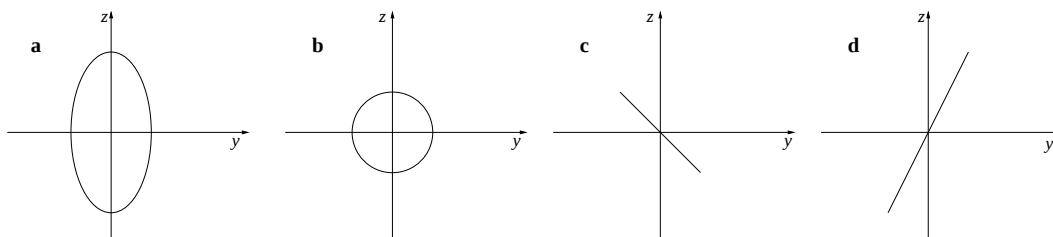
B

9) En masse m er festet til ei ideell fjær med fjærkonstant k . En dempemekanisme gir en dempingskraft $-b\dot{x}$, dvs proporsjonal med massens hastighet $\dot{x}$. Massen påvirkes av en ytre harmonisk kraft $F(t) = F_0 \cos \omega t$ slik at utsvinget fra likevekt blir $x(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \phi)$, med frekvensavhengig amplitude $A(\omega)$ og fasekonstant $\phi(\omega) = \arctan[(\omega_0^2 - \omega^2)m/\omega b]$. (Her er $\omega_0^2 = k/m$.) Hvilken av påstandene nedenfor om resonans er da *feil*?

- A Når frekvensen til F tilsvare systemets resonansfrekvens, er F og $\dot{x}$ i fase.
- B Midlere tilført effekt er proporsjonal med F_0^2 .
- C Med svak damping er F og x i fase dersom ω er betydelig mindre enn ω_0 .
- D Med svak damping er resonanskurvens halvverdibredde proporsjonal med b^{-1} .

Påstand D er feil. Svak damping gir smal resonanskurve, og da kan ikke bredden være proporsjonal med $1/b$. Bredden er derimot proporsjonal med b .

D



10) Figuren over viser fire kurver som spissen av $\mathbf{D}(x, t)$ vil tegne ved $x = 0$ for følgende fire harmoniske bølger:

$$\mathbf{D}(x, t) = D_0 \sin(kx - \omega t)\hat{y} + D_0 \sin(kx - \omega t + \pi)\hat{z} \quad (1)$$

$$\mathbf{D}(x, t) = D_0 \sin(kx - \omega t)\hat{y} + 2D_0 \cos(kx - \omega t)\hat{z} \quad (2)$$

$$\mathbf{D}(x, t) = D_0 \sin(kx - \omega t)\hat{y} + D_0 \cos(kx - \omega t)\hat{z} \quad (3)$$

$$\mathbf{D}(x, t) = D_0 \sin(kx - \omega t)\hat{y} + 2D_0 \sin(kx - \omega t)\hat{z} \quad (4)$$

Hvilke figurer hører sammen med hvilke $\mathbf{D}(0, t)$?

- A (a og 3), (b og 4), (c og 1), (d og 2)
- B (a og 4), (b og 1), (c og 3), (d og 2)
- C (a og 2), (b og 3), (c og 1), (d og 4)
- D (a og 1), (b og 2), (c og 3), (d og 4)

Vi har ved $x = 0$:

$$\mathbf{D}(0, t) = -D_0 \sin(\omega t)\hat{y} + D_0 \sin(\omega t)\hat{z} \quad (5)$$

$$\mathbf{D}(0, t) = -D_0 \sin(\omega t)\hat{y} + 2D_0 \cos(\omega t)\hat{z} \quad (6)$$

$$\mathbf{D}(0, t) = -D_0 \sin(\omega t)\hat{y} + D_0 \cos(\omega t)\hat{z} \quad (7)$$

$$\mathbf{D}(0, t) = -D_0 \sin(\omega t)\hat{y} - 2D_0 \sin(\omega t)\hat{z} \quad (8)$$

Dermed blir alternativ C riktig.

C

11) Ved adiabatisk forhold har vi $pV^\gamma = \text{konstant}$. Her er p trykket, V er volumet, mens γ er adiabatkonstanten. Hva blir sammenhengen mellom trykk og temperatur ved adiabatisk forhold? (Anta ideell gass.)

- A $p^{\gamma-1} T^{-\gamma} = \text{konstant}$
- B $pT = \text{konstant}$
- C $p^\gamma T = \text{konstant}$
- D $pT^{\gamma-1} = \text{konstant}$

$$pV^\gamma = p \left(\frac{Nk_B T}{p} \right)^\gamma \sim p^{1-\gamma} T^\gamma \sim p^{\gamma-1} T^{-\gamma}$$

Ettersom vi startet med noe som er konstant, kan vi f.eks opphøye denne i en eller annen konstant, inklusive minus en, noe som gir den siste sammenhengen.

A

12) Kravet om energibevarelse medfører at amplituden til trykkvariasjonsbølgen for en kulebølge avtar med avstanden r fra symmetrisenteret som $(\Delta p)_0(r) \sim r^{-n}$ med

- A $n = 1/2$
- B $n = -1/2$
- C $n = 1$
- D $n = -1$

Like mye effekt må passere gjennom alle kuleskall med ulik radius r . Dermed:

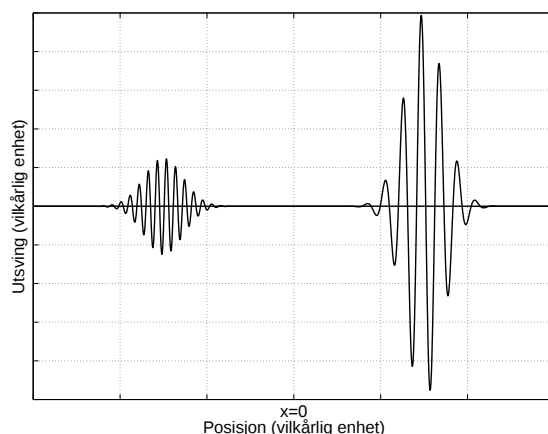
$$4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$$

som gir at intensiteten avhenger av r som

$$I(r) \sim 1/r^2$$

Vi har at $I \sim \xi^2$, men siden $\Delta p \sim \partial \xi / \partial x$, må vi også ha $I \sim (\Delta p)^2$. Dermed: $(\Delta p)_0 \sim 1/r$ og $n = 1$.

C



13) En bølgepakke på en streng kom inn fra venstre og ble delvis reflektert og delvis transmittert i en skjøt litt til venstre for $x = 0$. Figuren over viser den reflekterte og den transmitterte bølgepakken. Omtrent hvor stor andel av den innkommende bølgepakkes energi ble reflektert?

- A Ca 6 %
- B Ca 11 %
- C Ca 16 %
- D Ca 21 %

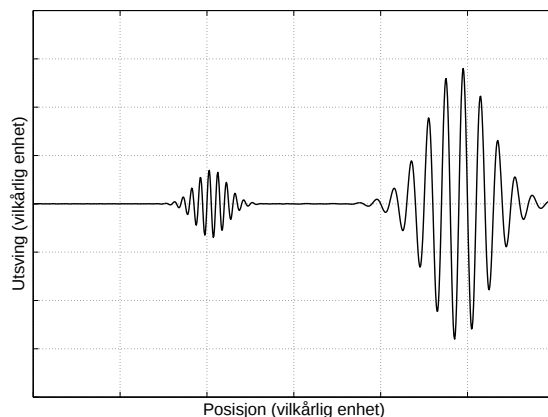
$$y_{r0} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} y_{i0}$$

der reflektert bølge er i område 1 og transmittert bølge i område 2. Fra grafen ser vi at $\lambda_2 \simeq 2\lambda_1$ som gir

$$R = |y_{r0}/y_{i0}|^2 \simeq 0.11$$

B

Dessverre var figuren i oppgaveteksten misvisende og forvirrende, i og med at den transmitterte bølgepakken bare hadde omlag halvparten så mange bølgetopper som den reflekterte. Dette er u fysikalsk. Et riktigere bilde vil se omtrent slik ut:



Av den grunn fikk alle registrert riktig svar på denne oppgaven.

14) Et tynt, luftfylt rør er lukket i den ene og åpent i den andre enden. Røret er 3 m langt. Anslå frekvensen til grunntonen i røret en kald vinterdag på Røros. Du kan anta at luft består av 4/5 nitrogen (N_2) og 1/5 oksygen (O_2), med molekyllmasser henholdsvis 28 og 32 ganger protonmassen.

- A 26 Hz
- B 39 Hz
- C 64 Hz
- D 113 Hz

Grunntonen: $\lambda = 4L = 12$ m. Midlere molekyllmasse: $m = (0.8 \cdot 28 + 0.2 \cdot 32) \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 4.8 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$. Lydhastigheten: $v = \sqrt{\gamma k_B T / m} \simeq \sqrt{1.4 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 243 / 4.8 \cdot 10^{-26}} \simeq 312 \text{ m/s}$. På en kald vinterdag er det gjerne -30°C på Røros. Frekvensen blir dermed $f \simeq 312/12 \simeq 26 \text{ Hz}$.

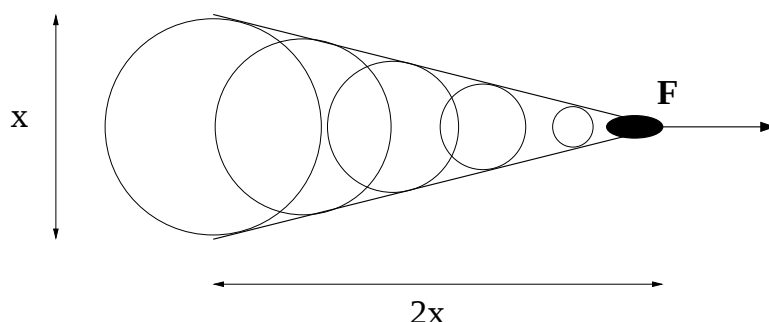
A

15) En ambulansesirene genererer en harmonisk lydbølge med frekvens 850 Hz. En sterk vind blåser i retning fra ambulansen og mot deg, med vindhastighet 25 m/s. Både du og ambulansen står stille. Hvilken frekvens hører du? (Lydhastigheten er 340 m/s.)

- A 783 Hz
- B 850 Hz
- C 917 Hz
- D 985 Hz

Så lenge $v_O = v_S = 0$, spiller det ingen rolle om det blåser. Observatøren vil måle samme frekvens som kilden (S) sender ut.

B



16) I figuren over angir sirklene (kule-)bølgefronter generert ved at flyet (F) komprimerer lufta i forkant. Bruk figuren til å bestemme flyets hastighet, målt i enheter av lydhastigheten.

- A 1.3
- B 2.0
- C 2.9
- D 4.1

$\tan \alpha = (x/2)/2x = 0.25$, dvs $\alpha \simeq 14$ grader. Dermed: $v_F/v = 1/\sin \alpha = 4.1$.

D

17) En bølgepakke ute på havet har (hovedsaklig) bølgelengde 20 m. Bølgepakken beveger seg rett mot kysten som ligger 5 km unna. Hvor lang tid tar det før bølgepakken når land? Du kan anta at vi hele tiden er på dypt vann. Dispersjonsrelasjonen for dypvannsbølger er $\omega(k) = \sqrt{gk + \gamma k^3/\rho}$, med $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $\gamma = 0.073 \text{ J/m}^2$ og $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$.

- A ca et kvarter
- B ca en halvtime
- C ca to timer
- D ca fire timer

For så lange bølgelengder har vi $\omega(k) = \sqrt{gk}$ og dermed $v_g = \sqrt{g/4k} = \sqrt{g\lambda/8\pi}$. Bølgepakken bruker dermed tiden $t = L/v_g = 5000/2.79 = 1790$ sekunder, dvs ca en halv time, inn til land.

B

18) Strengt tatt er transversale bølger på en streng *ikke helt* dispersjonsfrie. Anta at vi har en uniform metallstreng med sirkulært tverrsnitt A , massetetthet ρ og elastisk modul (Youngs modul) Y . Dispersjonsrelasjonen er da gitt som

$$\omega = \sqrt{\frac{S}{\mu} k^2 + \frac{Y A^2}{4\pi\mu} k^4}$$

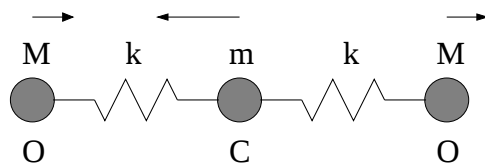
der S er strekket i strengen og $\mu = \rho A$ er strengens masse pr lengdeenhet. For korte bølgelengder blir dermed fasehastigheten v og gruppehastigheten v_g ikke nøyaktig like store. Hvilken av dem er størst?

- A Det kommer an på hva bølgelengden er.
- B Det kan ikke avgjøres ut fra den oppgitte dispersjonsrelasjonen.
- C Fasehastigheten.
- D Gruppehastigheten.

Her kan vi skrive $\omega^2 = ak^2 + bk^4$ med positive konstanter a og b . Gruppe- og fasehastigheten blir dermed hhv

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2\omega} \frac{d\omega^2}{dk} = \frac{1}{2\omega} (2ak + 4bk^3) \\ v &= \frac{\omega}{k} = \frac{1}{2\omega} \frac{2\omega^2}{k} = \frac{1}{2\omega} (2ak + 2bk^3) < v_g \end{aligned}$$

D



19) Karbondioksyd, CO_2 , er et lineært molekyl, som vist i figuren over. Vi antar at kreftene mellom karbon og oksygen kan beskrives ved hjelp av ideelle fjærer med fjærkonstant k . Atomene kan svinge harmonisk omkring sine likevektsposisjoner i fire såkalte "normale moder". En av disse normale modene er antydnet i figuren. Her svinger oksygenatomene (masse M) i samme retning (med lik amplitude), mens karbonatomet (masse m) svinger motsatt vei. Molekylets massemiddelpunkt ligger hele tiden i ro. Hva er vinkelfrekvensen ω til denne vibrasjonsbevegelsen?

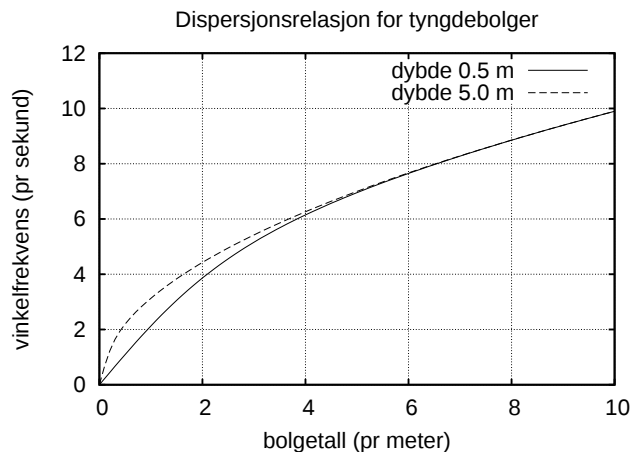
- A $\sqrt{k(m-2M)/mM}$ B $\sqrt{k(m+2M)/mM}$ C $\sqrt{k/(2M+m)}$ D $\sqrt{k/(2M-m)}$

Massesenteret i ro betyr at $mx_C + 2Mx_O = 0$, dvs $x_C = -(2M/m)x_O$. Her er x_C og x_O utsvingene til hhv C og O fra likevekt. Netto kraft på O, f.eks den til venstre: $-kx_O + kx_C = -kx_O(1 + 2M/m)$ Newtons andre lov gir dermed $\ddot{x}_O + \omega^2 x_O = 0$ med $\omega^2 = k(m+2M)/mM$

B

20) Figuren til høyre viser dispersjonsrelasjonen $\omega(k) = \sqrt{gk \tanh(kD)}$ for tyngdebølger på to ulike dyp, $D = 0.5$ m (heltrukken linje) og $D = 5.0$ m (stiplet linje). Hvilken av påstandene om fasehastighet v og gruppehastighet v_g til venstre er *riktig*?

- A For bølgetall større enn ca 5 m^{-1} er v og v_g omtrent like store.
 B v og v_g varierer i sterkere grad med dybden for korte enn for lange bølgelengder.
 C Når bølgelengden er *mye* større enn dybden, blir v og v_g omtrent like store.
 D Når bølgelengden er *mye* større enn dybden, blir v og v_g uavhengige av dybden.



Påstand C er riktig. Når $\lambda \gg D$ er $kD \ll 1$, og vi kan med god tilnærming skrive $\tanh kD \simeq kD$. Det gir $\omega(k) \simeq \sqrt{gk \cdot kD} = \sqrt{gD}k$, dvs en lineær dispersjonsrelasjon. Da er v og v_g like store. Dette viser umiddelbart at påstand D er feil. Påstand A er feil siden v_g nærmer seg verdien $v/2$ når λ blir stadig mindre (dvs tyngdebølger på dypt vann). Da blir dispersjonsrelasjonen etter hvert $\omega(k) = \sqrt{gk}$, slik at v og v_g *ikke* varierer med dybden. (Som viser at påstand B også er feil.)

C

FY1002/TFY4160 Bølgefysikk

Fasit, Midtsemesterprøve fredag 15. oktober 2010 kl 08.15 – 09.45

Oppgave	A	B	C	D	Oppgave	A	B	C	D
1	☒	☐	☐	☐	11	☒	☐	☐	☐
2	☐	☐	☐	☒	12	☐	☐	☒	☐
3	☐	☐	☐	☒	13	☐	☒	☐	☐
4	☐	☒	☐	☐	14	☒	☐	☐	☐
5	☒	☐	☐	☐	15	☐	☒	☐	☐
6	☐	☐	☒	☐	16	☐	☐	☐	☒
7	☐	☐	☒	☐	17	☐	☒	☐	☐
8	☐	☒	☐	☐	18	☐	☐	☐	☒
9	☐	☐	☐	☒	19	☐	☒	☐	☐
10	☐	☐	☒	☐	20	☐	☐	☒	☐