

Utsatt eksamen

TFY4163 2023

1 Regneoppgaver

1. Anta at vi har transversale bølger på en snor. Snoren har massetetthet per lengde μ og er spent opp med en snorkraft S . Vi antar videre at amplituden er mye mindre enn bølgelengden. Vi lar x -aksen være langs snoren og utslaget være uttrykt som $y(x, t)$. For alle deloppgavene, være nøye med å presisere antagelser.

- (a) Vis at kinetisk energi per lengde ϵ_k er gitt av,

$$\epsilon_k = \frac{1}{2} \mu (\partial_t y)^2 \quad (1)$$

- (b) Vis at potensiell energi per lengde ϵ_p er gitt av

$$\epsilon_p = \frac{1}{2} S (\partial_x y)^2 \quad (4)$$

- (c) Vis at for all tidspunkt så har vi

$$\epsilon_k = \epsilon_p \quad (9)$$

2. Figur 1 viser (over)trykket for en periodisk, plan lydbølge som funksjon av posisjon x ved tiden $t = 0$. Bølgen beveger seg i positiv x -retning. Vi antar at bølgehastigheten er $v = 344 \text{ m s}^{-1}$. La bulkmodulen for luft være $B = 1,42 \times 10^5 \text{ Pa}$.

- (a) Tegn en skisse av trykket som funksjon av t ved posisjon $x = 0$. Marker verdier både langs tids- og trykkaksen. Hva er perioden til bølgen?

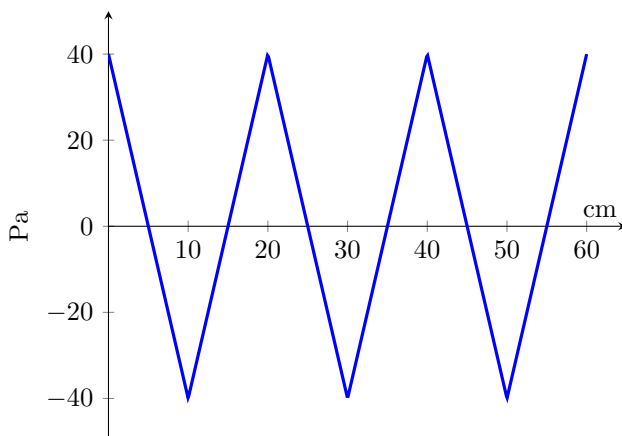


Figure 1: Trykk som funksjon av posisjon ved tiden $t = 0$.

- (b) Tegn en skisse av forskyvningen $\xi(x, t)$ som funksjon av x ved tiden $t = 0$. La $\xi(0, 0) = 0$ Marker verdier både langs forskyvnings- og posisjonsaksen. Hva er amplituden til forskyvningen?
- (c) Hva er den maksimale partikkelhastigheten?
3. Gitt stasjonær strømning, diskuter sammenhengen mellom uttrykkene for massebevaring i *kompressible* fluider (integral- og differensialform) og divergensteoremet (Gauss' teorem).
4. Gitt det inkompressible strømningsfeltet

$$\mathbf{v} = (axy + b)\hat{\mathbf{x}} - \left(\frac{1}{2}ay^2 + c\right)\hat{\mathbf{y}} \quad (29)$$

hvor a , b og c er konstanter. Dersom det er mulig, finn hastighetspotensialet for dette strømningsfeltet. Hvis ikke, forklar hvorfor det ikke er mulig.

5. Vis at den materialderivate a massetettheten $\rho(x, t)$ er gitt av

$$D_t \rho = -\rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad (34)$$

Anta at vi har en strømning med positiv divergens av hastighetsfeltet i et vilkårlig punkt. Basert på uttrykket over, hva kan man da si om hvordan volumet til et fluidelement som passerer gjennom dette punktet endres?

(hint: Kanskje du kan bruke kontinuitetslikningen? Merk at væsken kan være kompressibel. Kanskje du trenger identiteten $\nabla \cdot (f\mathbf{g}) = f\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{g}\nabla f$.)

2 Numeriske oppgaver

6. Vi skal simulere bevegelsen til en harmonisk oscillator ved hjelp av Eulers metode (eksplisitt/forward Euler).

Bevegelseslikningen for en harmonisk oscillator er

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) \quad (38)$$

Men vi skal nå se på en “matematisk” (dimensjonsløs) variant av denne ligningen:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -bx(t) \quad (39)$$

hvor vi antar at alle variablene og parameteren b er dimensjonsløse (ingen benevning).

Løs denne likningen numerisk ved hjelp av Eulers metode (eksplisitt/forward Euler). Denne numerisk metoden er ikke stabil (global feil øker raskt) og dersom tidsstegene er for store vil vi få en rask (ufysisk) økning i amplituden. La en $\epsilon = x_m - x_0$ være en parameter som beskriver endringen i amplitude hvor x_m er maksimalverdien av absoluttverdien av utslaget i hele domenet (Python funksjoner `max`, `abs`) og x_0 er initialverdien.

Kjør simuleringen fra $t = 0$ til $t = 1$. Del opp tidsintervallet i N steg slik at vært tidssteg blir $h = 1/N$. La $x(0) = 1$, og $\dot{x}(0) = 0$.

Se på minst tre ulike verdier av b fordelt mellom 200 og 5000. For hver av b -verdiene, finn N slik at $0.09 < \epsilon < 0.10$. Lag en tabell som viser b/N for de ulike b -verdiene (du kan prøve å starte med en $N \approx 5b$).

3 Flervaglsoppgaver

7. En sfærisk vanddråpe i luft har radius 1,0 mm. Overflatespenningen til vann mot luft er 0,073 N/m. Hva er trykkforskjellen mellom det indre av dråpen og omgivelsene?
- A. 12 Pa B. 68 Pa C. 0,11 kPa D. 0,15 kPa E. 0,21 kPa

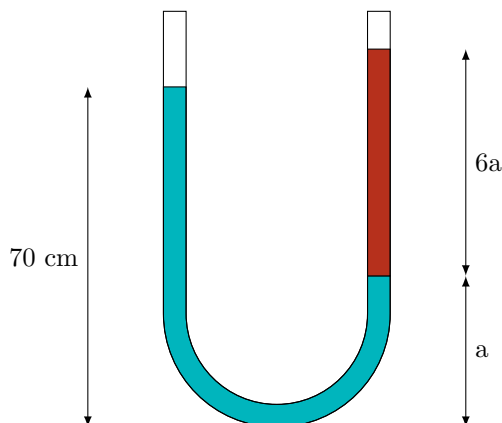
8. Hvilke betingelser *må* være oppfylt for at følgende likning skal være gyldig?

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (42)$$

- A. Friksjonsfritt og inkompressibelt
B. Rotasjonsfritt
C. Friksjonsfritt og stasjonært
D. Inkompressibelt
E. Stasjonært og inkompressibelt
9. To bølger med små amplituder beveger seg på en havoverflate. Slike bølger er dispersive. Hvilke (du kan velge flere) av følgende utsagn er *ikke sanne* om de to bølgene.
- A. De kan ha ulik amplitude.
B. De kan ha ulike bølgelengde.
C. De kan ha ulik frekvens
D. De kan ha ulik fasehastighet
E. De kan ha samme frekvens men ulik bølgelengde
10. Et tog har en fløyte som sender ut en lydbølge på 400 Hz når toget er i ro. Hva blir bølgelengden på lydbølgen som sendes ut foran toget dersom toget beveger seg i 25 m s^{-1} . La lydhastigheten være 344 m s^{-1} .
- A. 0,75 m
B. 0,80 m
C. 0,85 m
D. 0,90 m
E. 0,95 m

11. I et buet rør som vist i figuren er det helt vann ($\rho_w = 997 \text{ kg/m}^3$) og olje ($\rho_o = 790 \text{ kg/m}^3$). Røret er åpent mot atmosfæren i begge ender. Væskene fordeler seg slik at høyden på vannsøylen på den ene siden er $L = 70 \text{ cm}$, mens på den andre siden er høyden på oljen seks ganger så høy som vannet (se figur).

Hvor høy er væskesøylen totalt på siden med olje og vann?



- A. 75 cm
- B. 80 cm
- C. 85 cm
- D. 90 cm
- E. 95 cm