1. En transversal bølge er gitt av

$$\mathbf{f}(x,t) = A\sin(kx - \omega t)\hat{\mathbf{y}} + B\sin(kx - \omega t + \phi)\hat{\mathbf{z}} \tag{1}$$

For hvilke verdier av A, B og ϕ representerer bølgen en sirkulærpolarisert bølge? For hvilke verdier representerer den en lineærpolarisert bølge? Svaret må begrunnes.

Solution: Dersom vi lar $A = \pm B$ og $\phi = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ så er bølgen beskrevet av (siden $\sin(a + \frac{\pi}{2}) = \cos(a)$)

$$\mathbf{y}(x,t) = A\sin(kx - \omega t)\hat{\mathbf{y}} + A\cos(kx - \omega t)\hat{\mathbf{z}} \tag{2}$$

Ser vi for eksempel på et gitt punkt x vil dette være en vektor som tegner opp en sirkel med radius A når tiden t øker, altså en sirkulærpolarisert bølge.

Dersom vi lar $\phi = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, så får vi

$$\mathbf{y}(x,t) = A\sin(kx - \omega t)\hat{\mathbf{y}} \pm B\sin(kx - \omega t)\hat{\mathbf{z}} \tag{3}$$

Her vil forholdet mellom vektorkomponentene hele tiden være like når argumentet endrer seg. Dermed peker vektoren hele tiden i samme retning og vi får lineær polarisasjon.

2. Du er sendt til en fjern planet for å måle dens masse. Med deg har du et instrument som har et lodd med masse $m = 7{,}50$ kg som henger i en $L = 4{,}00$ m lang snor. Snoren veier 0,028 kg. Anta at vekta på snora ikke påvirker snordraget. Instrumentet kan eksitere transversale mekaniske bølger langs snoren og kan måle tiden T det tar for en puls å forplante seg fra loddet til opphengspunktet. Før du landet på planeten målte du radien av planeten til $7{,}20 \cdot 10^7$ m. Du leser av på instrumentet at $T = 0{,}060$ s. Hva er planetens masse?

(Hint: Tyngdekraften F mellom to objekter med masse m og M og avstand r mellom massesentrene er gitt av $F = G\dfrac{mM}{r^2}$. $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$.)

Solution: Bølgehastigheten er gitt av

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}} \tag{4}$$

hvor S er snordraget.

Tiden det tar for en bølge å forplante seg langs snoren blir da

$$T = \frac{L}{v} = \frac{L}{\sqrt{\frac{S}{\mu}}} \tag{5}$$

Snordraget er gitt av

$$S = G\frac{mM}{r^2}. \tag{6}$$

Vi setter inn for S og får

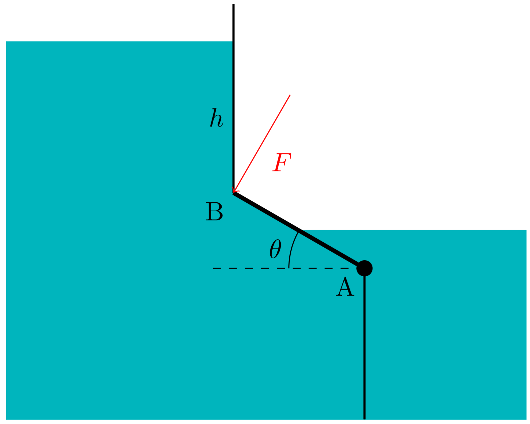

Figure 1: Oppgave 3

$$T = \frac{L}{v} = \frac{L}{\sqrt{\frac{G\frac{mM}{r^2}}{\mu}}} \tag{7}$$

Som vi kan løse for M og få

$$M = \frac{L^2 \mu r^2}{GmT^2} \tag{8}$$

Setter vi inn verdier får vi

$$M = 3{,}2 \times 10^{26}\,\mathrm{kg} \tag{9}$$

3. Figur 1 viser en demning med en kvadratisk luke med sidekanter h og den ene sidekanten langs AB. Luken er hengslet i A og kan rotere fritt rundt en akse gjennom A, normalt på figurplanet. En kraft F virker i punkt B og holder luken i likevekt. Punktet B er en dybde h under vannflaten på venstre side. Vannet på høyre side når halvveis opp på luken. La massetettheten til vannet være ρ og tyngdens akselerasjon g. La $\theta = 30°$ (Hint: $\sin(30°) = \frac{1}{2}$).

   Finn et uttrykk for F, uttrykt ved de oppgitte størrelsene, slik at luken er i likevekt.

   (Det andre arealmoment til et rektangel med høyde h og bredde b, om en akse i kvadratets plan, parallell med bredden og gjennom geometrisk senter, er gitt av $I_{xx} = \frac{1}{12}bh^3$. Du kan benytte dette om du ønsker.)

Solution: For at porten skal være i likevekt må summen av kreftene og dreiemomentene vær lik null. Siden luken er festet i punkt A sørger hengslene her for at summen av kreftene er null. For å slippe disse kreftene i summen av dreiemomentene velger vi referansepunktet i A.

Kreftene som bidrar til et dreiemoment på luken er da trykkreftene fra vannet på høyre og venstre side og kraften F.

La x være avstanden fra A opp langs luken.

Dreiemomentet τ fra vannet er da gitt av

$$\tau = \int_A p(x)x\,\mathrm{d}A = h\int p(x)x\,\mathrm{d}x \tag{10}$$

Lar vi z være avstanden fra overflaten blir trykket p for den venstre siden av luken,

$$p = \rho g z = \gamma z = \frac{\gamma}{2}(3h - x) \tag{11}$$

hvor vi har brukt $\gamma = \rho z$ og

$$z = h + h\sin\theta - x\sin\theta = \frac{3h - x}{2} \tag{12}$$

I siste steg er det brukt $\sin\theta = \sin 30° = \frac{1}{2}$.
Vi setter dette inn og integrerer

$$\tau_v = \frac{h\gamma}{2}\int_0^h (3h - x)x\,\mathrm{d}x = \frac{h\gamma}{2}\left[\frac{3hx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{7}{12}h^4\gamma \tag{13}$$

For den høyre siden har vi

$$z = \frac{h}{2}\sin\theta - x\sin\theta = \frac{h}{4} - \frac{x}{2} \tag{14}$$

Setter vi inn og integrerer får vi

$$\tau_h = \frac{h\gamma}{2}\int_0^h \left(\frac{h}{2} - x\right) x\,\mathrm{d}x = \frac{h\gamma}{2}\left[\frac{hx^2}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{96}h^4\gamma \tag{15}$$

Den eksterne kraften må balansere dreiemomentene og vi finner dermed at

$$F = \frac{55}{96}\gamma h^3 \tag{16}$$

4. En sfærisk beholder med diameter $d_s = 35$ cm lekker luft gjennom et lite hull i siden med diameter på $d_h = 5.0$ mm. Anta at luften har en gjennomsnittlig hastighet over hullet på $v = 360$ m/s. Anta at luften i beholderen mikses godt slik at massetettheten til luften i beholderen er homogen (lik i hele volumet) men tidsavhengig siden luften lekker ut. Massetettheten til luften er ved $t = 0$, $\rho = 2.5$ kg/m^3. Anta at hastigheten til luften gjennom hullet er konstant for tidsrommet vi ser på.

   (a) Finn et uttrykk for massetettheten $\rho(t)$ som en funksjon av tid og de oppgitte størrelsene.

Solution: Vi bruker transportteoremet for masse

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\,\mathrm{d}V + \int_{\partial V} \rho(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}})\,\mathrm{d}A = 0$$

og bruker overflaten på kulen som kontrollvolum. Volumet er konstant men tettheten er en funksjon av tid slik at første leddet blir

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\,\mathrm{d}V = \int_V \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}V$$

I det andre leddet har vi bare strømning med konstant hastighet gjennom hullet slik at de andre leddet blir

$$\int_{\partial V} \rho(\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}})\,\mathrm{d}A = \rho(t)vA$$

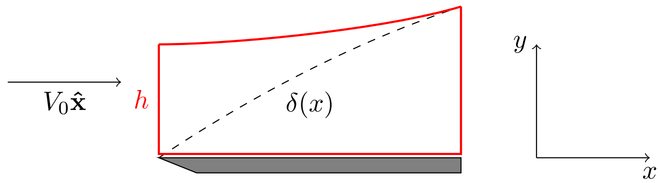

Figure 2: Oppgave 5

> Vi ender da opp med differensiallikningen
>
> $$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\rho(t)v\frac{A}{V} = -\rho(t)v\alpha$$
>
> Som har løsningen
>
> $$\rho(t) = \rho_0 \exp(-v\alpha t)$$
>
> hvor
>
> $$\alpha = \frac{A}{V} = \frac{\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{\frac{d_h^2}{4}}{\frac{d_s^3}{6}} = \frac{3}{2}\frac{d_h^3}{d_s^3}$$

(b) Finn en tallverdi for hvor raskt tettheten endrer seg, $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$, ved tiden $t = 0$.

> **Solution:** Setter vi inn det oppgitte tallverdiene finner vi
>
> $$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\rho(t)v\alpha = -0{,}79\,\mathrm{kg/m^3/s}$$

5. Figur 2 viser et viskøst grensesjikt (under stiplet linje) som dannes over en tynn plate hvor det strømmer et inkompressibelt fluid. Høyden på grensesjiktet som funksjon av x langs platen er $\delta(x)$. Hastigheten til den eksterne, friksjonsfrie strømningen før platen er $V_0\hat{\mathbf{x}}$. La $\mathbf{v}(x, y)$ være hastigheten i grensesjiktet. Vi antar at vi kan neglisjere hastighetskomponenter vertikalt på flaten i grensesjiktet slik at $\mathbf{v}(x, y) = (v_x(x, y), 0)$. Den røde linjen viser forslag til et kontrollvolum hvor den øvre linjen følger en strømlinje. Anta at systemet ikke har noen variasjon vertikalt på figurens plan.

   Vis at

$$V_0 = \frac{1}{h}\int_0^{\delta(x)} v_x(x, y)\mathrm{d}y \tag{17}$$

> **Solution:** Vi bruker massebevaring på integralform. Ettersom fluidet er inkompressibelt reduserer transportteoremet til
>
> $$0 = \int \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}A \tag{18}$$
>
> Vi lar b være en endelig bredde inn i planet og skriver arealet som $\mathrm{d}A = b\,\mathrm{d}y$.
>
> Integralet er null over øvre og nedre flate ($v = 0$). Vi integrer over endeflatene som gir

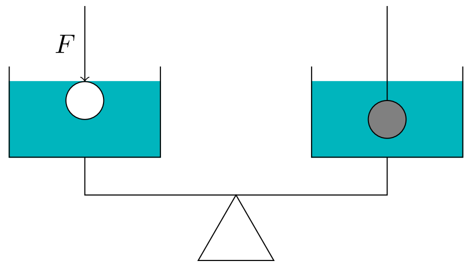

Figure 3: Oppgave 6

$$0 = -V_0 bh + \int_0^{\delta(x)} v_x(x,y) b \, \mathrm{d}y \tag{19}$$

som gir

$$V_0 = \frac{1}{h} \int_0^{\delta(x)} v_x(x,y) \mathrm{d}y \tag{20}$$

6. En balansevekt består av to like skåler med like mye vann (se figure 3). I den ene skålen er det nedsenket en metallkule som henger i en tynn tråd. I den andre skålen presses en ping-pong ball med samme volum ned i væsken av en kraft (for eksempel med fingrene) slik at den akkurat er under væskens overflate.

   Vil vekten tippe den ene eller andre veien eller vil den være balansert? Begrunn svaret (Ubegrunnet svar gir null poeng. Mer presis fysisk begrunnelse gir høyere score).

   Solution: Vekten vil være balansert.

   Oppdriften (kraften) som virker fra vannet på kulen og ping-pong ballen er lik tyngden av de fortrengte vannet og den er lik på begge sider. En motsatt rettet kraft vil virke på vannet.

   I tillegg virker tyngden på vannet men den er like stor siden det er like mye vann.

   Kreftene blir derfor like store på begge sider av vekten som dermed er balansert.

7. Følgende oppgave er gitt til en student

   Et hastighetsfelt i en friksjonsfri, inkompressibel væske er gitt av

   $$\mathbf{v} = 2xy\hat{\mathbf{x}} - y^2\hat{\mathbf{y}}$$

   Finn et uttrykk for $\partial_x p$ (x-komponenten av gradienten til trykket). Neglisjer gravitasjon.

   Students besvarelse er vist i figur 4

   Har studenten gjort noe feil? I så fall hva?

Antagelser:

- friksjonsfritt: viskositeten = 0
- inkompressibel væske: rho = konstant
- gravitasjonen er neglisjerbar: g = o

Navier-Stokes etter fjerning av ledd som følge av antagelsene:

$\vec{v} \cdot nabla \cdot \vec{v} = \frac{-nabla\ P}{rho}$

x-komponent: $d_x P = -rho \cdot v_x \cdot d_x v_x \ = \ rho \cdot 2 \cdot x \cdot y^2$

Figure 4: Oppgave 7.

Solution: Studenten skriver konvektive leddet i Eulers likning som

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \mathbf{v} =$$

og x-komponenten som

$$v_x \partial_x v_x$$

Dette er ikke riktig. Den riktige formen på det konvektive leddet er

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v} =$$

Slik at x-komponenten blir

$$(v_x \partial_x + v_y \partial_y) v_x = v_x \partial_x v_x + v_y \partial_y v_x$$

Flervalgsoppgaver

8. Du oppdager en biltyv og kjører etter ham på motorsykkelen. Bilalarmen har gått og sender ut en frekvens på 520 Hz. Hvis du hører en frekvens på 490 Hz og ser at du kjører i 80 km/t, hvor fort kjører da biltyven? Anta lydhastighet på 340 m/s.

A. 38 m/s B. 40 m/s C. 42 m/s **D. 44 m/s** E. 46 m/s

Solution: Dopplereffekten når både kilde og observatør beveger seg er gitt av (med fortegn vi har brukt, observatør beveger seg bort fra kilde og kilde beveger seg mot observatør)

$$f' = f \left(\frac{v - v_o}{v - v_s} \right)$$

I denne konvensjonen er hastighetene negative slik at vi kan skrive

$$f' = f \left(\frac{v + |v_o|}{v + |v_s|} \right)$$

Løser vi for $|v_s|$ får vi

$$|v_s| = \frac{f(v + |v_o|) - f'v}{f'}$$

setter vi inn tallverdier får vi $|v_s| = 44$ m/s

9. En bølgevektor er gitt av $\mathbf{k} = (3{,}0\hat{\mathbf{x}} + 2{,}0\hat{\mathbf{y}})\mathrm{m}^{-1}$. Hva er bølgelengden?

   A. 0,98 m B. 1,3 m **C. 1,7 m** D. 2,1 m E. 2,8 m

Solution: Lengden av bølgevektoren er gitt av

$$k = |\mathbf{k}| = \sqrt{13}\,\mathrm{m}^{-1}$$

Bølgelengden er da

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1{,}7\,\mathrm{m}$$

10. En longitudinal bølge transmitteres fra et fast stoff til en gass. Hvilket av utsagnene er typisk sant for hva som skjer når bølgen transmitteres?

    A. Frekvensen øker og fasthastigheten er lik.
    B. Amplituden øker og frekvensen minker.
    C. Fasehastigheten øker og frekvensen er lik.
    D. Frekvensen er lik og amplituden minker.
    E. Fasehastigheten minker og amplituden øker.

Solution: Frekvensen til bølgene må være lik for å oppfylle grensebetingelsene. Fasehastigheten for et fast stoff er typisk høyere enn for en gass. Amplituden for en transmittert bølge til et materiale med lavere bølgeimpedans vil være høyere enn for den innkommende bølgen.

11. Hvilke av følgende utsagn er *usanne* om en normale mode (du kan velge flere alternativer).

    A. Alle delen av systemet svinger med samme frekvens i en normal mode.
    B. Alle delene av systemet svinger med samme amplitude i en normal mode.
    C. Bevegelsen er en løsning på bølgelikningen.
    D. I en superposisjon av to ulike moder svinger alle delene av systemet med samme frekvens.
    E. Relativ fasevinkel mellom delene av systemet er enten 0 eller π i en normal mode.

Solution: De ulike delen av systemet kan svinge med ulik amplitude i en normal mode (f.eks et knutepunkt med amplitude lik 0 har ulik amplitude en de andre delene)(B usann).

I en superposisjon av flere ulike moder vil ikke bevegelsen til delene av systemet beskrives av en enkel frekvens. Den vil generelt ikke være en harmonisk funksjon (D usann).

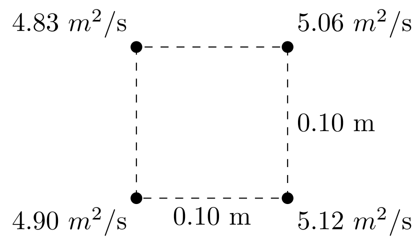

Figure 5: Hastighetspotensialet i diskrete punkter

12. Lys i form av en planbølge med bølgelengde $\lambda = 680$ nm treffer en skjerm hvor det er to svært tynne spalter med innbyrdes avstand på $d = 0.25$ mm. På en parallell vegg $L = 3.0$ m bak skjermen observerer du striper med høy intensitet. Hva er avstanden mellom de disse stripene?

A. 8,2 mm B. 14 mm C. 19 mm D. 24 mm E. 28 mm

Solution: Vi får høy intensitet der bølgene fra de to spaltene interfererer konstruktivt. Det får vi når forskjellen i avstand er et helt antall bølgelengder,

$$m\lambda = d\sin(\theta) \approx d\theta \approx d\frac{y}{L}$$

som gir

$$y = \frac{m\lambda L}{d}$$

Avstand mellom to maksima blir

$$y = \frac{\lambda L}{d} = 8{,}2\,\text{mm}$$

13. Et numeriske analyseprogram har regnet ut hastighetspotensialet til et fluid i diskrete punkter $\phi(x_n, y_n)$ i et kvadratisk grid. Verdien i fire nabopunkter er vist i figuren. Avstanden mellom punktene er 0.10 m, langs aksene. Hva indikerer dataene at absoluttverdien av hastigheten til fluidet er i senter av kvadratet?

   A. 16 m/s
   B. 12 m/s
   C. 9,8 m/s
   D. 5,3 m/s
   E. 2,4 m/s

Solution: Vi har at

$$v_x = \partial_x \phi \approx \frac{\Delta_x \Phi}{\Delta x}$$

hvor Δ_x representerer endring i x-retning.

Vi kan ta gjennomsnittet av endring i x-retning ved de to ulike y-verdiene som gir

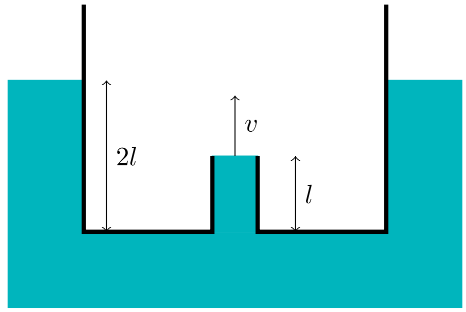

Figure 6: Kar nedsenket i vann med innvendig.

$$v_x \approx \frac{\Delta_x \Phi}{\Delta x} \approx \frac{0{,}225\,\mathrm{m^2/s}}{0{,}10\,\mathrm{m}} = 2{,}3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Tilsvarende for y-retning blir

$$v_y = \approx \frac{\Delta_y \Phi}{\Delta y} \approx \frac{-0{,}065\,\mathrm{m^2/s}}{0{,}10\,\mathrm{m}} = -0{,}65\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

hvor vi har antatt positiv x-akse og y-akse henholdsvis til høyre og opp i figuren.

absoluttverdien blir

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2{,}4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

14. En sfærisk vanndråpe i luft har radius 1,0 mm. Overflatespenningen til vann mot luft er 0,073 N/m. Hva er trykkforskjellen mellom det indre av dråpen og omgivelsene?

A. 12 Pa B. 68 Pa C. 0,11 kPa **D.** 0,15 kPa E. 0,21 kPa

Solution: Vi har generelt at

$$\Delta p = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \tag{21}$$

For en sfære er begge radiene like slik at vi får

$$\Delta p = \frac{2\gamma}{R} = \frac{2 \cdot 0{,}073\,\mathrm{N\,m^{-1}}}{1\,\mathrm{mm}} = 146\,\mathrm{Pa} \tag{22}$$

15. En beholder senkes ned i vann slik at bunnen er $2l$ under overflaten. Figuren viser et tverrsnitt av beholderen. I bunnen av beholderen er et rør med lengde l som vender inn i beholderen . Hva er hastigheten til vannet når det kommer ut av røret (før nivået inni beholderen når toppen av røret). Anta at vi kan se bort fra friksjon. La $l = 20$ cm.

A. 2,0 m/s B. 2,8 m/s C. 3,3 m/s D. 3,7 m/s E. 4,5 m/s

Solution: Bruk Bernoulli's likning. Velg for eksempel en strømlinje som slutter i enden på røret og starter i et punkt i vannet som er tilnærmet i ro i en dybde z. Vi får da,

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p_a}{\rho} - gl = \frac{p_a + \rho g z}{\rho} - gz$$

Som gir

$$v = \sqrt{2gl} = 2{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

16. Hvilke betingelser *må* være oppfylt for at følgende likning skal være gyldig (altså ikke *kan* være oppfylt).

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{23}$$

A. Friksjonsfritt og inkompressibelt

B. Rotasjonsfritt

C. Friksjonsfritt og stasjonært

D. Inkompressibelt

E. Stasjonært og inkompressibelt