

Eksamen FY1005/TFY4165 Termisk fysikk kl 09.00 - 13.00 fredag 12. august 2016
Bokmål

Oppgave 1. Termodynamiske potensialer og arbeid (Poeng: 10+10+10=30)

a. Gi en kort fysisk tolkning av hver av de fire termodynamiske potensialene indre energi U , entalpi $H = U + pV$, Helmholtz fri energi $F = U - TS$, og Gibbs fri energi $G = F + pV$. Her er T temperatur, p trykk, V volum, og S entropi.

b. Vi ser nå på varmeutveksling mellom to varmereservoarer, som kan benyttes til å utføre arbeid. Det ene reservoaret har varmekapasitet $2C$ og start-temperatur T_1 , det andre reservoaret har varmekapasitet C og start-temperatur T_2 . Arbeid skal utføres av dette oppsettet ved at en først termisk isolerer reservoarene fra de ytre omgivelsene, og så lar varme strømme fra det varme til det kalde reservoaret. Kraftverket går helt til temperaturene er jevnet ut mellom reservoarene. Varmekapasitetene til reservoarene antas konstante i det aktuelle temperatur-intervallet. Vi antar videre at hele systemet er så godt varmeisolert at varme ikke opptas fra eller avgis til de ytre omgivelsene.

Finn slutt-temperaturen til de to reservoarene når varmeoverføringen brukes til å utføre eit maksimalt arbeid. Vis at denne temperaturen er mindre enn den slutt-temperaturen en ville fått dersom reservoarene hadde blitt bragt i direkte kontakt med hverandre og temperaturene hadde blitt jevnet ut i en irreversibel prosess uten at noe arbeid hadde blitt utført.

c. Finn det maksimale arbeidet som kan utføres av kraftverket.

Oppgave 2. Carnot-prosess. (Poeng: 5+5+10+5+5=30)

En Carnot-prosess er en reversibel kretsprosess som består av to isoterme prosesser og to adiabatisk prosesser. Dersom vi tenker oss dette realisert for et gass-system, starter Carnot-prosessen i punktet 1 (V_1, T_1), gassen ekspanderer så isotermt til punktet 2 (V_2, T_1), ekspanderer deretter adiabatisk til punktet 3 (V_3, T_2), komprimeres deretter isotermt til punktet 4 (V_4, T_2), og komprimeres til slutt adiabatisk tilbake til punktet 1. Her er V volum og T temperatur.

La oss istedet tenke oss at vi skal se på dette for et elektrisk polariserbart stoff. Dette er et stoff der en kan få innretning av elektriske dipoler ved å påtrykke et ytre elektrisk felt. I et slikt system tar termodynamisk identitet formen

$$TdS = dH + \epsilon_0 P d\mathcal{E}.$$

Her er H entalpi, ϵ_0 er elektrisk permittivitet, $\mathcal{E}$ er ytre elektrisk felt, og P er polariseringen, som måler graden av innretning av elektriske dipoler. En slikt system er definert ved tilstandsligningen

$$P = C \frac{\mathcal{E}}{T},$$

der C er en konstant.

- a. Tegn opp Carnot-prosessen i et (T, S) -diagram.
- b. Vis ved regning at virkningsgraden til en Carnot-maskin er helt uavhengig av arbeidssubstansen som brukes.
- c. Vis at for et ideelt polariserbart stoff er sammenhengen mellom $\mathcal{E}$ og T langs en adiabat er gitt ved

$$C_{\mathcal{E}} T^2 - \epsilon_0 C \mathcal{E}^2 = \text{konstant}.$$

der $C_{\mathcal{E}} = (\partial H / \partial T)_{\mathcal{E}}$ er systemets varmekapasitet ved konstant elektrisk felt, og som antas uavhengig av temperatur og elektrisk felt.

- d. Tegn opp Carnot-prosessen for en ideell magnet i et $(T, \mathcal{E})$ -diagram. Angi startpunkt, hva som er isotermer og adiabater, og hva som er retningen på kretsprosessen.
- e. Anta at systemet er i termisk likevekt ved temperaturen T_1 og et felt $\mathcal{E}_1$, og gjennomløper en reversibel adiabatisk nedkjøling til temperaturen $T_2 = T_1 - \Delta T$ ved at det elektriske feltet reduseres til $\mathcal{E}_2$. Finn temperaturendringen $\Delta T = T_1 - T_2$ uttrykt ved $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, T_1 , $C_{\mathcal{E}}$, C , og ϵ_0 , når $\Delta T \ll T_1$.

Oppgave 3. Gass av to-atomige molekyler i én dimensjon. (Poeng: 10+10+10=30)

I denne oppgaven skal vi se på en gass av to-atomige molekyler der partiklene kun kan bevege seg i én dimensjon, dvs de beveger seg kun langs (x)-aksen. Vi antar at gassen er så fortynnet at vi kan se bort ifra krefter som måtte virke mellom de to-atomige molekylene.

a. Bruk det klassiske ekvipartisjonsprinsippet til å finne varmekapasiteten til gassen per molekyl.

b. En samling av N en-dimensjonale harmoniske oscillatorer har fri energi F gitt ved (skal ikke vises!)

$$F = NkT \ln \left(2 \sinh \left(\frac{\beta \hbar \omega}{2} \right) \right).$$

Her er $\hbar$ Planck's konstant, og $\omega = 2\pi\nu$, der ν er svingefrekvensen til oscillatoren. Finn varmekapasiteten $C = \partial U / \partial T$ til denne samlingen av harmoniske oscillatorer. Hva blir svaret i høytemperatur-grensen $T \gg \hbar\omega/k$? Hva blir svaret i lavtemperatur-grensen $T \ll \hbar\omega/k$?

c. I gassen som er beskrevet innledningsvis i oppgaven, er den høyeste karakteristiske temperaturen som skiller kvantemekanikk fra klassisk fysikk gitt ved $kT = \hbar\omega$, som her kan antas å være omtrent $1000K$. Alle andre karakteristiske temperaturer der kvantemekaniske effekter blir viktige, kan antas for å være høyst av orden $1K$. Hva blir varmekapasiten til den to-atomige gassen beskrevet innledningsvis i oppgaven, ved $100K$?

FORMLER OG UTTRYKK.

Formlenes gyldighetsområde og symbolenes betydning antas å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene. Vektorer med fete typer.

Utvidelseskoeffisienter, trykk-koeffisient, isoterm kompressibilitet:

$$\alpha_L = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_p \quad \alpha_V = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad \alpha_p = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \quad \kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$

Syklisk regel:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y = -1$$

Første hovedsetning:

$$dQ = dU + dW$$

Varmekapasitet:

$$C = \frac{dQ}{dT}$$

$$C_p - C_V = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

Termodynamiske potensialer:

$$H = U + pV \quad F = U - TS \quad G = H - TS \quad G = \sum_j \mu_j N_j$$

Den termodynamiske identitet:

$$TdS = dU + pdV - \sum_j \mu_j dN_j$$

Ideell gass tilstandsligning:

$$pV = NkT = nRT$$

van der Waals tilstandsligning:

$$p = \frac{NkT}{V - Nb} - \frac{aN^2}{V^2}$$

Adiabatisk prosess:

$$dQ = 0$$

Joule-Thomson-koeffisienten:

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_H$$

PCH 4.18:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p$$

Entalpi-versjonen av 4.18 PCH

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_T = -T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p + V$$

Virkningsgrad for varmekraftmaskin:

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{inn}}}$$

Virkningsgrad for Carnot-maskin:

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Maxwells hastighetsfordeling:

$$g(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} \quad F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} \quad f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

Gauss-integraler:

$$\begin{aligned} I_0(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\ I_2(\alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{d}{d\alpha} I_0(\alpha) \quad \text{etc} \\ I_3 &= \int_0^{\infty} dx \, x e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha} \end{aligned}$$

Det klassiske ekvipartisjonsprinsippet:

Hver frihetsgrad som inngår kvadratisk i energifunksjonen E bidrar med $kT/2$ til midlere energi.

Partisjonsfunksjon:

$$Z = \sum_j e^{-E_j/kT} = e^{-\beta F} \quad (\beta = 1/kT)$$

Kjøleskap, virkningsgrad (effektfaktor):

$$\varepsilon_K = \left| \frac{Q_{\text{ut}}}{W} \right|$$

Varmepumpe, virkningsgrad (effektfaktor):

$$\varepsilon_V = \left| \frac{Q_{\text{inn}}}{W} \right|$$

Entropi og Clausius' ulikhet:

$$dS = \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} \quad \oint dS = 0 \quad \oint \frac{dQ}{T} \leq 0$$

Boltzmanns prinsipp:

$$S = k \ln W$$

Stirlings formel:

$$N! = \sqrt{2\pi N} N^N e^{-N} \quad (N \rightarrow \infty)$$

Eksergi:

$$W_{\text{max}} = -\Delta G \quad \text{med} \quad G = U - T_0 S + p_0 V$$

Kjemisk potensial:

$$\mu_j = \left(\frac{\partial G}{\partial N_j} \right)_{p, T, N_{i \neq j}}$$

Ideell blanding:

$$\Delta S_{\text{mix}} = -k \sum_j N_j \ln x_j \quad \mu_j = \mu_j^0 + kT \ln x_j$$

(Clausius-)Clapeyrons ligning:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta S}{\Delta V}$$

Strålingshulrom, frekvensfordeling:

$$\frac{du}{df} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{\exp(hf/kT) - 1} \quad ; \quad u(T) = \int_0^{\infty} \frac{du}{df} df$$

Stefan-Boltzmanns lov:

$$j_s(T) = \frac{c}{4} u(T) = \sigma T^4 \quad (\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15 h^3 c^2)$$

Fouriers lov:

$$\mathbf{j} = -\kappa \nabla T \quad ; \quad j = \dot{Q}/A$$

Varmeledningsligningen:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T$$

Ficks lov:

$$\mathbf{j} = -D \nabla n$$

Diffusjonsligningen:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \nabla^2 n$$

U -verdi:

$$j = U \Delta T$$

Midlere fri veilengde, fortynnet gass ($n = N/V$; σ = spredningstverrsnitt):

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$$

Varmeledningsevne, fortynnet gass (c_V = varmekapasitet pr molekyl; m = molekylmasse):

$$\kappa = \frac{2c_V}{3\sigma} \sqrt{\frac{kT}{\pi m}}$$

Diffusjonskonstant, fortynnet gass:

$$D = \frac{2}{3n\sigma} \sqrt{\frac{kT}{\pi m}} = \frac{\kappa}{nc_V}$$

Fysiske konstanter:

$$\begin{aligned} k &= 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \\ R &= 8.314 \text{ J/molK} \\ N_A &= 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \\ \hbar &= h/2\pi = 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \\ e &= 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2 \\ m_e &= 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ u &= 1.66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ c &= 3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ \epsilon_0 &= \frac{1}{c^2 \mu_0} \\ \sigma &= 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4 \end{aligned}$$

Omregningsfaktorer:

$$\begin{aligned} 1 \text{ eV} &= 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ J} \\ 1 &= 10^{-10} \text{ m} \\ 1 \text{ cal} &= 4.184 \text{ J} \\ 1 \text{ bar} &= 10^5 \text{ Pa} \\ 1 \text{ atm} &= 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$