

①

Forslag til løsning.

Oppgave 1.

a) langs adiabatene gjelder
 $pV^\gamma = \text{konst}$

Eliminerer p v.h.a. $pV = RT$ og finner
 $(RT/V) V^\gamma = \text{konst}$
 $T V^{\gamma-1} = \text{konst.}$

Med $C_p = C_v + R$ for ideell gass har en så
 $\gamma \equiv C_p/C_v = (7/2)/(5/2) = 1,4$

eller $\gamma - 1 = 0,4$; $1/(\gamma - 1) = 2,5$

Følgelig finner en
 $T_1 V_0^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$
 $V_3 = V_0 (T_1/T_3)^{1/(\gamma-1)}$

Ved temperaturene T_2 og T_3 er trykket det samme slik at $pV = RT$ gir

$$V_2/T_2 = V_3/T_3$$

$$V_2 = V_3 \frac{T_2}{T_3} = V_0 \frac{T_2}{T_3} \left(\frac{T_1}{T_3} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

For å bestemme V_1 brukes igjen adiabatlikningen som ovenfor. Resultatet blir følgelig

$$V_1 = V_2 \left(\frac{T_3}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)} = V_0 \frac{T_2}{T_3} \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^{1/(\gamma-1)} = V_0 \left(\frac{T_2}{T_3} \right)^\alpha$$

$$\text{der } \alpha = \gamma/(\gamma-1) = \frac{7}{2} = 3,5$$

②

b) langs adiabatene tilføres ikke varme, dvs

$$Q_{12} = Q_{31} = 0$$

Langs isolatoren har en oppvarming ved konstant trykk, dvs.

$$Q_{23} = C_p(T_3 - T_2) = (C_v + R)(T_3 - T_2) = \alpha R(T_3 - T_2)$$

da $C_p = \gamma C_v = C_v + R$, dvs. $C_v = R/(\gamma - 1)$. ($\alpha = \frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{7}{2}$)

Langs isotermer er tilført varme lik utført arbeid da konstant temperatur ikke gir endring i indre energi for ideell gass.

Når $pV = RT$ og resultatet fra punktet a) benyttes blir arbeidet

$$Q_{11} = \int_{V_0}^{V_1} p dV = R T_1 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = R T_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_0} \right)$$

$$= \alpha R T_1 \ln \left(\frac{T_2}{T_3} \right) (< 0)$$

c) langs adiabaten er det ikke noen endring i entropien (reversibel prosess uten tilførsel av varme). langs isotermer vil endringen i entropi følge av

$$T dS = dQ = dU + dW = dW \quad (dU = 0)$$

Så med $T = T_1 = \text{konstant}$ får vi følgelig

$$\Delta S_{31} = S_3 - S_1 = S_3 - S_2 = -(S_1 - S_2) = -\frac{Q_{11}}{T_1} = \alpha R \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right)$$

③

For ideell gass avhenger indre energi kun av temperaturen slik at den tilhørende endringen i indre energi blir

$$\Delta U_{31} = C_V(T_3 - T_1) = \frac{5}{2}R(T_3 - T_1)$$

d/ Utført arbeid W er like netto tilført varme for en hel syklus ($\Delta U = 0$).

$$W = Q_{23} + Q_{11}.$$

Virkningsgraden blir følgende

$$\eta = \frac{W}{Q_{23}} = 1 + \frac{Q_{11}}{Q_{23}} = 1 - \frac{T_1 \ln(T_3/T_2)}{T_3 - T_2}$$

e/ Varmerutveksling med omgivelsene for å endre temperaturen fra T_4 til T_1 vil være en irreversibel prosess. Dette fører til at total entropi øker og dermed går noe av muligheten til å utføre arbeid tapt. Følgelig vil virkningsgraden være størst når $T_4 = T_1$, for da forsvinner dette tapet (når T_2 og T_3 er fast).

[Når $T_4 \neq T_1$, kanne varmerutvekslingen over temperaturgapet brukes til å drive en varmekraftmaskin som kunne kompensere det nevnte tapet. Uten denne kompensasjonen vil entropiendringen være $dS_{\text{tot}} = dS_{\text{mask}} + dS_{\text{omg.}} = dQ (1/T_4 - 1/T_1) > 0$ da $dQ \geq 0$ avhenger av $T_1 \geq T_4$ (dvs. varmetransport fra varmt til kaldere).]

④

Oppgave 2

a/ Fra $G = U - TS + pV$ finner en først

$$dG = dU - TdS - SdT + pdV + Vdp$$

Dette benyttes så til å eliminere dU i den termodynamiske identitet

$$TdS = dU + pdV$$

som så gir

$$dG = -SdT + Vdp$$

Av dette finner en først

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S \text{ og } \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V$$

Ved å derivere 2 ganger finner en så

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)$$

$$\text{eller } -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

Når en erstatter U med $H = U + pV$ i den termodynamiske identitet finnes

$$dH = dU + pdV + Vdp$$

som innsett gir

$$TdS = dH - Vdp$$

Fra denne ligningen følger så

$$T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V.$$

Ved å benytte Maxwellrelasjonen følger dermed

$$\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T = V + T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \underline{\underline{V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}}$$

✓ For Joule-Thompson koeffisienten finner vi

$$\mu_{JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_H = \frac{-1}{\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T} = \frac{-1}{C_p \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T}$$

Her har vi først benyttet $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_T \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1$.

Videre er $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z^{-1} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$ benyttet, og til slutt er spesifikk varme ved konstant trykk

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p$$

Ved å sette inn resultatet fra punkt a) følger se

$$\underline{\underline{\mu_{JT} = \frac{1}{C_p} \left[T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V \right]}}$$

✓ Differensiering av tilstandslikningen gir

$$0 = dp = \left(\frac{R}{V} + \frac{dB}{dT} \frac{1}{V^2}\right) dT - \left(\frac{RT}{V^2} + 2 \frac{B}{V^3}\right) dV$$

$$T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = V \left(R + \frac{dB}{dT} \frac{1}{V}\right) / \left(R + 2 \frac{B}{TV}\right)$$

$$\text{og folgelig } \mu_{JT} = \frac{1}{C_p} \left(T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V\right)$$

$$= \frac{1}{C_p} V \left(R + \frac{dB}{dT} \frac{1}{V} - R - 2 \frac{B}{TV}\right) / \left(R + 2 \frac{B}{TV}\right) = \frac{\left(\frac{dB}{dT} - \frac{2B}{T}\right)}{\left(R + 2 \frac{B}{TV}\right)}$$

$$\xrightarrow{V \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \left(\frac{dB}{dT} - \frac{2B}{T}\right) \frac{1}{C_p}$$

Oppgave 3

a) Sannsynligheten for at oscilatoren skal være i en bestemt tilstand er gitt ved Boltzmannfaktoren

$$p_n = C e^{-\beta E_n} = C e^{-x \left(\frac{1}{2} + n\right)}$$

der $x = \beta \hbar \omega$ og C er bestemt av normeringen

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

En finner

$$1 = C e^{-\frac{1}{2}x} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-x})^n = \frac{C e^{-\frac{1}{2}x}}{1 - e^{-x}}$$

da summen er en geometrisk rekke. Folgelig har en

$$C e^{-\frac{1}{2}x} = 1 - e^{-x}$$

slik at den søkte sannsynligheten blir

$$\underline{\underline{p_n = (1 - e^{-\beta \hbar \omega}) e^{-\beta \hbar \omega n}}}$$

b) Energi over grunntilstandsenergien for de enkelte nivåene er

$$E_n = E_n - E_0 = \hbar \omega n$$

Midlere energi til en svingemode blir da

$$\varepsilon(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n p_n = \hbar \omega (1 - u) \sum_{n=0}^{\infty} n u^n$$

⑦

$$\begin{aligned} \varepsilon(\nu) &= \hbar \omega (1-u) u \frac{d}{du} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u^n \right) = \hbar \omega (1-u) u \frac{d}{du} \left(\frac{1}{1-u} \right) \\ &= \hbar \omega \frac{u}{1-u} = h\nu \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1} \end{aligned}$$

der $u = e^{-\beta \hbar \omega} = e^{-\beta h\nu}$ ($\hbar = 2\pi\hbar$, $\beta = 1/kT$).
Plancks lov blir følgende

$$u(\nu, T) = \frac{1}{V} g(\nu) \varepsilon(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3 (e^{\beta h\nu} - 1)}$$

c/ Volumet av termosen er $V = \frac{4\pi}{3} R^3$ slik at radius blir

$$R = \left(\frac{3}{4\pi} V \right)^{1/3} = \left(\frac{3}{4\pi} 0,5 \text{ dm}^3 \right)^{1/3} = \underline{0,492 \text{ dm}}$$

Overflaten til kule er dermed

$$A = 4\pi R^2 = \underline{3,05 \text{ dm}^2}$$

Netto utstrålt effekt mellom lagene blir så

$$\begin{aligned} P &= A(\bar{j}_{T+\Delta T} - \bar{j}_T) = A\sigma[(T+\Delta T)^4 - T^4] \\ &= \underline{4A\sigma T^3 \Delta T + \dots} \end{aligned}$$

For å bestemme hvor raskt temperaturen endrer seg når effekten er P , trenger en så varmekapasiteten til vannet i flasken. Denne er

$$C = C_p \cdot m = 4,185 \text{ J/gK} \cdot 500 \text{ g} = \underline{2,09 \cdot 10^3 \text{ J/K}}$$

⑧

Avgitt effekt vil nå være

$$-C \frac{dT}{dt} \quad (>0)$$

Denne effekten er igjen lik den utstrålte effekten. P slik at vi får likningen ($\Delta T = T - T_0$)

$$-C \frac{dT}{dt} = -C \frac{d(\Delta T)}{dt} = P = 4A\sigma T^3 \Delta T$$

eller $\frac{d(\Delta T)}{dt} = -\frac{1}{\tau} \Delta T$

Denne likningen har løsningen

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-t/\tau}$$

Decay-tiden er følgende

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{C}{4A\sigma T^3} = \frac{2,09 \cdot 10^3 \text{ J/K}}{4 \cdot 3,05 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot (293 \text{ K})^3} \\ &= \underline{1,20 \cdot 10^4 \text{ s}} = \underline{3\frac{1}{3} \text{ time}} \end{aligned}$$