

Forslag til løsning.

①

Oppgave 1

a) Differensiering av indre energi gir

$$dU = C_v dT + \frac{a}{V^2} dV$$

som innsett i den termodynamiske identitet gir

$$\begin{aligned} Tds &= dU + p dV = C_v dT + \frac{a}{V^2} dV + \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) dV \\ &= C_v dT + RT \frac{dV}{V-b} \end{aligned}$$

$$ds = C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V-b}$$

Integrert gir dette

$$S = C_v \ln T + R \ln(V-b) + \text{konst.}$$

Dvs. $A = C_v$, $B = R$ og $V_0 = b$.

b) Arbeidet langs isotermer er

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{RT_1}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) dV \\ &= \left| \left(RT_1 \ln(V-b) + \frac{a}{V} \right) \right|_{V_1}^{V_2} = \underline{RT_1 \ln \left(\frac{V_2-b}{V_1-b} \right) + a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right)} \end{aligned}$$

Langs adiabatene er entropien uendret
($Tds = dQ = 0$ for reversibel prosess). Følgelig

②

$$C_v \ln T_1 + R \ln(V_1-b) = C_v \ln T_2 + R \ln(V_2-b)$$

$$\begin{aligned} \ln T_2 &= \ln T_1 + \frac{R}{C_v} [\ln(V_1-b) - \ln(V_2-b)] \\ &= \ln T_1 + \ln \left(\frac{V_1-b}{V_2-b} \right)^{R/C_v} \end{aligned}$$

$$\underline{T_2 = T_1 \left(\frac{V_1-b}{V_2-b} \right)^{R/C_v}}$$

Arbeidet langs adiabatene tas fra indre energi da tilført varme er lik null, dvs. $0 = Q = dU + W$.

Utført arbeid er følgelig

$$\underline{W_2 = -dU = -(U_2 - U_1) = C_v(T_1 - T_2) - a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).}$$

c) Energibevarelse krever at tilført varme Q_2 pluss varme Q_1 fra kjøleskapet må være lik avgitt varme.

$$Q_1 + Q_2 = Q_0$$

Reversibel prosess gir best effektivitet og minst Q_2 . Da er entropien uendret. Med $dQ = Tds$ finner en da

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_0}{T_0} = \frac{Q_1 + Q_2}{T_0}$$

$$Q_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} \right) = Q_2 \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_2} \right)$$

$$\underline{Q_2 = Q_1 \frac{T_2 (T_0 - T_1)}{T_1 (T_2 - T_0)} = 2,5 \text{ kJ} \cdot \frac{353(30-2)}{275(80-30)} = 1,80 \text{ kJ}.}$$

(3)

Oppgave 2.

- a) Likevekt er temperatur, trykk og kjemisk potensial konstante over hele systemet

I det oppgitte uttrykket er R gasskonstanten, L_{sm} er smeltevarmen pr. mol og x_s er molbrøken av de oppløste stoffene.

Ved frysepunktet vil fast stoff være i likevekt med væsken. For likevekt har en da

$$\mu_f(p, T_0) = \mu_v(p, T_0)$$

for kjemisk potensial i henholdsvis fast fase og væskefase for det rene oppløsningsmidlet på frysepunktet T_0 ved trykk p . Ved svak oppløsning kan antagelsen om ideell blanding brukes for oppløsningsmidlet brukes slik at det kjemiske potensial i væskefasen blir

$$\mu_v(p, T) = \mu_v^0(p, T) + kT \ln x$$

der $x = 1 - x_s$ er molbrøken til oppløsningsmiddelet. Fase likevekt gir så

$$\mu_f^0(p, T) = \mu_v^0(p, T) + kT \ln x$$

der $T = T_0 + \Delta T$. Ved utvikling om $T = T_0$ finner en så (for små ΔT)

$$\mu^0(p, T) = \mu^0(p, T_0) + \frac{\partial \mu^0}{\partial T} \Delta T = \mu^0(p, T_0) - S \Delta T$$

(4)

$$\text{der } S = - \frac{\partial \mu^0}{\partial T} = - \frac{1}{N} \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_p = \frac{S}{N}$$

er entropi pr. partikkel. Likevektsbetingelsen for oppløsningen blir dermed

$$\mu_f^0(p, T_0) - S_f \Delta T = \mu_v^0(p, T_0) - S_v \Delta T + kT \ln x$$

$$(S_v - S_f) \Delta T = kT \ln x = kT \ln(1 - x_s) \approx -kT_0 x_s \quad (x_s \rightarrow 0)$$

Smeltevarmen pr. mol er så $L_{sm} = T_0 (S_v - S_f)$

$= T_0 N_A (S_v - S_f)$ der N_A er Avogadro's tall. Med

$R = N_A k$ finner en da følgende

$$L_{sm} \Delta T = T_0 N_A (S_v - S_f) \Delta T = -N_A k T_0^2 x_s = -R T_0^2 x_s$$

$$\Delta T = - \frac{R T_0^2}{L} x_s$$

b) Molekylvekt til H_2O : $2 \cdot 1 + 16 = 18$.

— " — C_2H_6O : $2 \cdot 12 + 6 \cdot 1 + 16 = 46$.

Smeltevarme pr. mol: $L_{sm} = 330 \text{ J/g} \cdot 18 \text{ g/mol} = 5940 \text{ J/mol}$.

Molbrøk av C_2H_6O :

$$x_s = - \Delta T \frac{L_{sm}}{R T_0^2} = 4,5 \text{ K} \cdot \frac{5940 \text{ J/mol}}{8,314 \text{ J/K} \cdot \text{mol} \cdot (273 \text{ K})^2} = 0,043$$

Antall mol H_2O : $n_{H_2O} = 3,0 \text{ kg} / 18 \text{ g/mol} = 167 \text{ mol}$

Mengde C_2H_6O i vannet ($x_s \ll 1$)

$$m \approx 46 \text{ g/mol} \cdot x_s \cdot n_{H_2O} = 46 \cdot 0,043 \cdot 167 \text{ g} = 330 \text{ g}$$

⑤

Oppgave 3.a) Sammenhengen mellom D , λ og $\langle v \rangle$ er

$$D = \underline{C \lambda \langle v \rangle}$$

der C er en konstant. Tilsvarende har en

$$\lambda = \underline{\frac{C}{n}} \quad \text{og} \quad \langle v \rangle = \underline{C \sqrt{T}}$$

b) Antall mol $\text{H}_2\text{O}(\text{vann})$ er $\frac{m}{M}$ der $M = 18 \text{ g/mol}$ er vekten av vann pr. mol. Antall partikler blir derfor $N_t = N_A \frac{m}{M}$

Partikkelstrømtettheten ved diffusjon er

$$\vec{J} = -D \nabla n$$

der n er tettheten av partikler. Da tettheten av H_2O -partikler utenfor røret er like 0 vil tetthetsgradienten bli

$$|\nabla n| = \frac{n_0}{L}$$

der n_0 er tettheten av vanddamp i bunnen av røret.

Total partikkelstrøm blir så

$$J = j A = D A \frac{n_0}{L}$$

Tettheten n_0 er bestemt av likningen for ideell gass $pV = NkT$

⑥

$$n_0 = \frac{N}{V} = \frac{p}{kT}$$

slik at

$$J = D \frac{A}{L} \frac{p}{kT}$$

Tiden det tar før alt er tørrt bort. Her følgende

$$t = \frac{N_t}{J} = N_A \frac{m}{M} \frac{L k T}{D A p} = \frac{m R T L}{M D A p}$$

$$\frac{0,15 \cdot 10^{-3} \cdot 8,314 \cdot 293 \cdot 0,15}{18 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-5} \cdot 1,8 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{20}{760} \cdot 1,013 \cdot 10^5} = \underline{\underline{2,1 \cdot 10^5 \text{ s}}} = \underline{\underline{2,4 \text{ døgn}}}$$