

Løsningsforslag for Eksamen 15. mai 2000.

Oppgave 1.

a) Idealgass, isoterm prosess: $p_1 V_1 = nRT_1 = p_2 V_2$.

i) $\Delta U = 0$ J, fordi U kun avhengig T for ideell gass, og her er T konstant,

ii) $\Delta H = H_2 - H_1 = U_2 - U_1 + p_2 V_2 - p_1 V_1 = \Delta U + nRT_1 - nRT_1 = 0$ J,

iii) $\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} dQ_{\text{rev}}/T_1$. 1.hovedsetning med $\Delta U = 0$ gir

$$dQ_{\text{rev}} = dW = p dV = (nRT_1/V) \cdot dV, \text{ slik at: } \Delta S = \frac{1}{T_1} \cdot nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} dV/V = \underline{\underline{nR \ln V_2/V_1}},$$

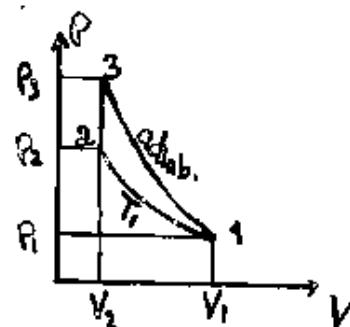
iv) $\Delta G = \Delta H - T_1 \Delta S = 0 - T_1 \Delta S = \underline{\underline{-nRT_1 \ln V_2/V_1}}$.

b) Beregning av p_3 baseres på adiabaten 3-1:

$$p_3 V_2^\gamma = p_1 V_1^\gamma \Rightarrow p_3 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = \frac{nRT_1}{V_1} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = \underline{\underline{nRT_1 \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^\gamma}}}$$

Tilhørende T_3 bestemt fra ideell gasslov:

$$T_3 = \frac{p_3 V_2}{nR} = \frac{1}{nR} nRT_1 \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}} = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}.$$



p_1 skal ikke inngå i uttrykkene. I grafen kreves rett kurveform (krumning) for de ulike delprosesser.

c) Arbeidet i den isokore prosessen er null slik at $W = W_{12} + W_{31}$.

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

For adiabaten 3-1 er $pV^\gamma = p_1 V_1^\gamma = p_3 V_2^\gamma$, slik at

$$\begin{aligned} W_{31} &= \int_{V_2}^{V_1} p dV = p_1 V_1^\gamma \cdot \int_{V_2}^{V_1} V^{-\gamma} dV = p_1 V_1^\gamma \cdot \frac{1}{1-\gamma} [V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma}] \\ &= \frac{1}{1-\gamma} [p_1 V_1^\gamma \cdot V_1^{1-\gamma} - p_3 V_2^\gamma \cdot V_2^{1-\gamma}] = \frac{1}{1-\gamma} [p_1 V_1 - p_3 V_2] = \frac{1}{\gamma-1} [nRT_3 - nRT_1] \end{aligned}$$

Dermed:

$$\underline{\underline{W = W_{12} + W_{31} = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{1}{\gamma-1} nR(T_3 - T_1)}}.$$

der $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7/2}{5/2} = \frac{7}{5}$ for toatomig gass (ikke nødvendig å beregne). Merk alternativt uttrykk:

$$\frac{1}{\gamma-1} nR = \frac{C_v}{C_p - C_v} nR = \frac{C_v}{nR} nR = C_v$$

Svaret skulle uttrykkes med γ , men C_v og nR godtas også. Men ingen trykk p skal inngå i svaret. Det er mange alternative former for W_{31} , f.eks.:

$$W_{31} = C_v T_1 \left((V_2/V_1)^{1-\gamma} - 1 \right) = C_v T_1 \left((V_1/V_2)^{\gamma-1} - 1 \right) = C_v T_3 \left(1 - (V_1/V_2)^{1-\gamma} \right)$$

Alternativ beregning:

1. lov for en hel syklus gir $0 \equiv \Delta U = Q - W$. Vi beregner varmer for hver delprosess, der vi allerede har funnet Q_{12} i a-iii) og resten er enkelt:

$$W = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31} = nRT_1 \ln V_2/V_1 + C_v \cdot (T_3 - T_1) + 0$$

d) For prosess 23 gjelder: $dQ = TdS$ og $dQ = C_V dT$. Gir integrert:

$$\int_{S_2}^S dS = C_V \int_{T_1}^T dT/T \Rightarrow S - S_2 = C_V \ln \frac{T}{T_1}$$

$$\Rightarrow T(S) = \underline{\underline{T_1 \cdot \exp \left\{ \frac{S - S_2}{C_V} \right\}}}$$

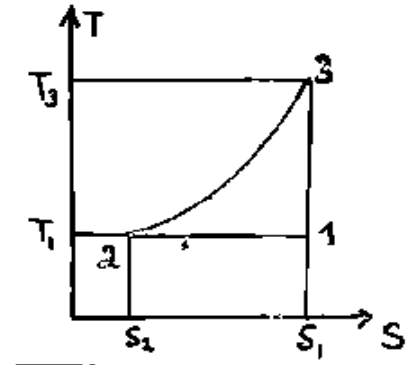
For toatomig gass er $C_V = \frac{5}{2}NR$, men det var ikke meningen å settes inn. I grafen kreves rett kurveform (krumning) for de ulike delprosesser.

Kontroll:

$$T_3 = T(S_1) = T_1 \cdot \exp \left\{ \frac{S_1 - S_2}{C_V} \right\}$$

$S_1 - S_2 = -\Delta S$ fra a) settes inn, og bruk av $NR = C_p - C_V = C_V(\gamma - 1)$ gir samme svaret som i b):

$$T_3 = T_1 \cdot \exp \left\{ \frac{-NR \ln V_2/V_1}{C_V} \right\} = T_1 \cdot \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{1-\gamma}$$



Oppgave 2.

* Enatomig ideell gass har tre frihetsgrader: translasjon i tre retninger. Da er $U = \frac{3}{2}NRT$ og $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2}NR$. Derfor:

$$\xi = \frac{C_V T}{pV} = \frac{\frac{3}{2}NRT}{pV} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}.$$

* Fotongass har (oppgitt formelark) $U = VaT^4$, slik at $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 4VaT^3$. Videre er $p = \frac{a}{3}T^4$ (formelark), slik at

$$\xi = \frac{C_V T}{pV} = \frac{4VaT^3 \cdot T}{\frac{a}{3}T^4 V} = \underline{\underline{12}}.$$

Oppgave 3.

Antall partikler dj med fart mellom v og $v + dv$ som unnslipper pr. tids- og flateenhet er lik oppgitt støttall: $dj = \frac{n}{4}vf(v)dv$.

Totalt antall som slipper ut uansett fart ved å integrere over alle mulige v (var også oppgitt):

$$j = \frac{n}{4} \int_0^\infty vf(v)dv = \frac{n}{4} \langle v \rangle \quad \left(= \frac{n}{4} \sqrt{\frac{4}{\pi b}} = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \right)$$

Brøkdelen av partikler som slipper ut med fart mellom v og $v + dv$ er derfor

$$\frac{dj}{j} = \frac{vf(v)dv}{\langle v \rangle} = f_{\text{ut}}(v)dv$$

der $f_{\text{ut}}(v)$ er den søkte fordelingsfunksjonen for unnslipende partikler. Det er for enkelt å avslutte her, man må finne eksplisitt uttrykk ved å sette inn oppgitte formler for Maxwellfordeling med $b = \frac{m}{2kT}$:

$$f_{\text{ut}}(v) = \frac{v}{\langle v \rangle} f(v) = v \sqrt{\frac{\pi b}{4}} 4\pi v^2 \left(\frac{b}{\pi} \right)^{3/2} \exp\{-bv^2\} = \underline{\underline{2b^2 v^3 \exp\{-bv^2\}}} \quad \left(= \frac{1}{2} \left(\frac{m}{kT} \right)^2 v^3 \exp\left\{ -\frac{mv^2}{2kT} \right\} \right)$$

Da blir

$$E = \langle E_k \rangle_{\text{ut}} = \left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle_{\text{ut}} = \frac{1}{2}m \int_0^\infty v^2 v^3 2b^2 \exp\{-bv^2\} dv = mb^2 \frac{1}{b^3} = \frac{m}{b} = \underline{\underline{2kT}}.$$

der oppgitte tabeller er brukt til å beregne integralet.

Oppgave 4.

a) I Fouriers lov $\dot{Q} = -\kappa \frac{dT}{dz} A$ er ved stasjonære forhold $\dot{Q}$, κ og A konstant, da må temperaturgradienten også være konstant, og lik $\frac{dT}{dz} = \frac{T_V - T_k}{l}$. Vi får da

$$\dot{Q} = -\kappa \frac{dT}{dz} A = -0,100 \frac{\text{W}}{\text{K} \cdot \text{m}} \cdot \frac{100 \text{ K}}{0,050 \text{ m}} \cdot 40,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 = 8,00 \text{ J/s} = 480 \text{ J/min.}$$

Denne varmestrømmen smelter is:

$$\Delta m = \frac{\dot{Q}}{l_{\text{sm}}} = \frac{8,00 \text{ J/s}}{335 \text{ kJ/kg}} = 0,0239 \text{ g/s} = \underline{\underline{1,43 \text{ g/min.}}}$$

b) Temperaturen er konstant i reservoarene slik at entropiendring ganske enkelt er lik varme (med fortegn) dividert med temperaturen. Det er viktig at fortegnet på entropien er riktig (totalentropien skal øke for denne irreversible prosessen!)

$$\begin{aligned}\Delta S_{\text{varm}} &= \frac{Q}{T_{100}} = \frac{-480 \text{ J}}{373 \text{ K}} = \underline{\underline{-1,287 \text{ J/K}}} \\ \Delta S_{\text{kald}} &= \frac{Q}{T_0} = \frac{480 \text{ J}}{273 \text{ K}} = \underline{\underline{1,758 \text{ J/K}}} \\ \Delta S_{\text{gass}} &= \underline{\underline{0 \text{ J/K}}} \\ \Delta S_{\text{tot}} &= (1,758 - 1,287) \text{ J/K} = \underline{\underline{0,471 \text{ J/K}}}.\end{aligned}$$

Kommentar til ΔS_{gass} : Gassen endrer ikke tilstand, og siden S er en tilstandsfunksjon endres heller ikke S for gassen.

c) Varmestrømmen $\dot{Q}$ er konstant gjennom hele gasslaget. Bruk av Fouriers lov gir

$$\dot{Q} = -\kappa(T) \frac{dT}{dz} A = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{kT}{\pi m}} \cdot \frac{C_V}{\sigma} \frac{dT}{dz} A = \text{konstant}$$

Trekker alle konstante størrelser inn i en konstant K og integrerer med z = avstanden fra det varme reservoaret:

$$\sqrt{T} dT = K \cdot dz \quad \xrightarrow{\text{integrert}} \quad \frac{2}{3} T^{3/2} = K \cdot z + K'$$

Eller, med nye konstanter:

$$T^{3/2} = A \cdot z + B$$

Grensebetingelser bestemmer A og B :

$$\begin{aligned}T(z=0) = T_v &\Rightarrow B = T_v^{3/2} \\ T(z=l) = T_k &\Rightarrow T_k^{3/2} = A \cdot l + T_v^{3/2} \Rightarrow A = \frac{1}{l} \cdot (T_k^{3/2} - T_v^{3/2})\end{aligned}$$

$$\text{Dvs.} \quad \underline{\underline{T^{3/2} = \frac{z}{l} \cdot (T_k^{3/2} - T_v^{3/2}) + T_v^{3/2}}}$$

Midt i luftlaget blir temperaturen

$$\begin{aligned}T(z=l/2) &= \left(\frac{1}{2} \cdot ((273 \text{ K})^{3/2} - (373 \text{ K})^{3/2}) + (373 \text{ K})^{3/2} \right)^{2/3} \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot (273 \text{ K})^{3/2} + \frac{1}{2} \cdot (373 \text{ K})^{3/2} \right)^{2/3} = \underline{\underline{324,9 \text{ K} \quad (51,8^\circ \text{C})}}\end{aligned}$$

Merk at denne temperaturen er helt uavhengig av konstantene som inngår i uttrykket for κ , det er bare selve temperaturavhengigheten som har betydning, i tillegg til temperaturene på grenseflatene.

Karakterstatistikk:

110 kandidater, 9 ikke møtt

1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	Totalt	Middel (uten 6,0)
11	18	20	18	14	11	4	3	2	0	0	101	2,41

Middelkarakter for de ulike oppgavene (fra faglærers bedømmelse):

1a	1b	1c	1d	2	3	4a	4b	4c
1,8	1,4	1,6	3,0	2,1	3,9	1,5	2,9	3,7

Oppgavesettet må betraktes som relativt enkelt, selv om mange hadde problemer med oppgavene 3 (noe overraskende) og 4c.

A.M. 2. juni 2000