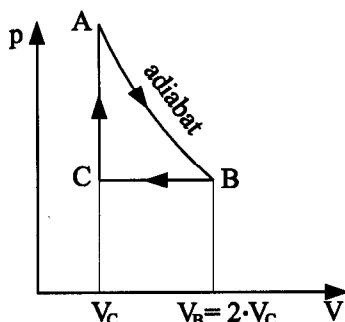


Løsningsforslag for kont.eksamen 16. aug 2000.

Oppgave 1.



a) Langs adiabaten AB er $TV^{\gamma-1} = \text{konst.}$, dvs.

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \Rightarrow T_B = T_A \cdot (V_A/V_B)^{\gamma-1} = T_A \cdot \frac{1}{2^{\gamma-1}} \quad (= T_A \cdot 0,63).$$

Langs BC er trykket konstant. Ideell gasslov $p = nRT/V = \text{konst.}$ gir $T_C/V_C = T_B/V_B$ og dermed

$$T_C = T_B \cdot V_C/V_B = T_B/2 = T_A \cdot \frac{1}{2^{\gamma}} \quad (= T_A \cdot 0,31).$$

Varmemengder:

$$Q_{AB} = 0 \quad (\text{adiabat})$$

$$Q_{BC} = C_p(T_C - T_B) = C_p T_A (2^{-\gamma} - 2 \cdot 2^{-\gamma}) = C_p T_A (1 - 2) 2^{-\gamma} = -C_p T_A 2^{-\gamma}$$

$$Q_{CA} = C_V(T_A - T_C) = C_V T_A (1 - 2^{-\gamma})$$

b) Virkningsgraden er $\eta = \frac{W}{Q_{\text{inn}}}$. I BC avkjøles gassen og varme avgis, i CA mottas varme. For å finne W bruker vi første hovedsetning for en kretsprosess: $\Delta U = Q - W = 0$, slik at $W = Q = Q_{CA} + Q_{BC}$.

$$\text{Virkningsgraden blir da } \eta = \frac{Q_{CA} + Q_{BC}}{Q_{CA}} = 1 + \frac{Q_{BC}}{Q_{CA}} = 1 - \frac{C_p}{C_V} \frac{1}{2^{\gamma-1}} = 1 - \frac{\gamma}{2^{\gamma-1}} = 0,23.$$

Den høyeste temperaturen i prosessen er T_A og laveste T_C (fra svarene i a). En Carnotmaskin som arbeider mellom temperaturene T_A og T_C vil ha virkningsgraden

$$\eta_m = \frac{T_A - T_C}{T_A} = 1 - \frac{T_C}{T_A} = 1 - 2^{-\gamma} = 0,69.$$

Dette er den maksimale virkningsgraden en reversibel maskin mellom T_C og T_A kan ha.

Oppgave 2.

a) For å bestemme U finner en differensiallikning for U fra det totale differensialet:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

$\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = C_V = \text{konstant}$, mens $\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T$ bestemmes fra oppgitt formel anvendt på vdW-likningen:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = -p + T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = -p + T \cdot \frac{R}{V-b} = \frac{a}{V^2}$$

Dette gir for dU og videre integrert

$$dU = C_V dT + \frac{a}{V^2} dV \Rightarrow U(T, V) = C_V \cdot T - \frac{a}{V} + U_0$$

Differensiallikning for entropien kan vi få fra den termodynamiske identitet

$$TdS = dU + pdV$$

Bruk av uttrykket for dU funnet over og vdW-tilstandslikningen gir

$$TdS = C_V dT + \frac{a}{V^2} dV + pdV = C_V dT + \frac{RT}{V-b} dV$$

Og vi finner dS som videre gir integrert:

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + \frac{R}{V-b} dV \Rightarrow \underline{\underline{S(T, V) = C_V \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V-b}{V_0-b} + S_0}}$$

b) For van der Waals gassen finner vi fra oppgitt uttrykk for entalpien: $H = U + pV$:

$$H(T, V) = U + pV = C_V T - \frac{a}{V} + U_0 + \frac{RTV}{V-b} - \frac{a}{V^2} V = \left(C_V + R \frac{V}{V-b} \right) T - \frac{2a}{V} + U_0.$$

Når gassen presses gjennom en porøs plugg er entalpien H bevart (isentalpisk prosess), dvs. $H_S = H_0$ (bevis kreves ikke). Med starttilstand (T_0, V_0) og slutttilstand $(T_S, V_S = \infty)$, gir kravet $H_S = H_0$ følgende likning

$$\left(C_V + R \frac{V_0}{V_0-b} \right) T_0 - \frac{2a}{V_0} = (C_V + R) T_S \Rightarrow T_S = \frac{\left(C_V + R \frac{V_0}{V_0-b} \right) T_0 - \frac{2a}{V_0}}{C_V + R}$$

$$T_S = \frac{\left(\frac{3}{2}R + R \frac{5b}{5b-b} \right) \frac{1}{2} \frac{a}{Rb} - \frac{2a}{5b}}{\frac{3}{2}R + R} = \frac{\left(R \frac{11}{4} \right) \frac{1}{2} \frac{a}{Rb} - \frac{2a}{5b}}{\frac{5}{2}R} = \frac{\frac{11}{8} \frac{a}{b} - \frac{2a}{5b}}{\frac{5}{2}R} = \frac{39}{50} \frac{a}{2Rb} = \frac{39}{50} T_0 \quad (= 0,78 \cdot T_0)$$

Oppgave 3.

a) En ideell blanding er definert ved at

- 1) Blandingsentropien er som for ideelle gasser.
- 2) Ingen endring av indre energi ved blanding.
- 3) Ingen endring av totalt volum ved blanding.

(Dette forutsetter blanding ved konstant trykk og temperatur).

Molvekt til Ne er 20 og molvekt til N_2 er $2 \cdot 14 = 28$. Antall mol blir

$$\begin{aligned} N_{Ne} &= \frac{10 \text{ g}}{20 \text{ g/mol}} = \frac{1}{2} \text{ mol} = 0,5 \text{ mol} \\ N_{N_2} &= \frac{28 \text{ g}}{28 \text{ g/mol}} = 1 \text{ mol} = 1,0 \text{ mol} \\ N &= N_{Ne} + N_{N_2} = \frac{3}{2} \text{ mol} = 1,5 \text{ mol} \end{aligned}$$

Blandingsentropien (oppgitt formel) blir da

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{mix}} &= -k \sum_i N_i \ln x_i = -R \sum_i N_i \ln x_i = -R \left(N_{Ne} \cdot \ln \frac{N_{Ne}}{N} + N_{N_2} \cdot \ln \frac{N_{N_2}}{N} \right) \\ &= -8,31 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)} \cdot (0,5 \text{ mol} \ln(1/3) + 1,0 \text{ mol} \ln(2/3)) = \underline{\underline{7,9 \text{ J/K}}}. \end{aligned}$$

b) Når gassene skilles endres ikke indre energi når T er konstant (ideelle gasser). Ifølge 1. hovedsetning er da utført arbeid lik tilført varme, altså tilført arbeid $W_{\text{tilført}} = -W = -Q$. Minste tilførte varme er Q_{rev} , dvs. varme tilført i en reversibel prosess som skiller gassene. Da denne prosessen foregår ved konstant temperatur er $Q_{\text{rev}} = T \cdot \Delta S$ der entropiendringen $\Delta S = -\Delta S_{\text{mix}}$. Da finner vi

$$W_{\text{tilført}} = -Q_{\text{rev}} = T \cdot \Delta S_{\text{mix}} = 300 \text{ K} \cdot 7,9 \text{ J/K} = \underline{\underline{2,37 \text{ kJ}}}.$$

c) En løsning på 5 vekt% betyr 5,0 g NaCl i 100 g vann. Siden NaCl har molekylvekt 58,5 og vann 18,0 gir dette $\frac{5,0 \text{ g}}{58,5 \text{ g/mol}} = 0,0855 \text{ mol}$ salt i $\frac{100 \text{ g}}{18,0 \text{ g/mol}} = 5,56 \text{ mol}$ vann. Men NaCl dissosierer i 2 ioner slik at antall mol løst stoff blir $2 \cdot 0,0855 = 0,171$, og molfraksjonen av løste partikler blir:

$$x_s = \frac{0,171}{5,56 + 0,171} = 0,0298$$

Dermed er frysepunktdepresjonen

$$\Delta T = -\frac{RT_0^2}{l_{\text{sm}}} \cdot x_s = -\frac{8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K} \cdot 273^2 \text{ K}^2}{6,0 \text{ kJ/mol}} \cdot 0,0298 = \underline{\underline{-3,1 \text{ K}}}.$$

Oppgave 4.

a) I Fouriers lov $\dot{Q} = -\kappa \frac{dT}{dz} A$ (oppgitt) er κ og A konstant, og ved stasjonære forhold er også $\dot{Q}$ konstant. Da må temperaturgradienten også være konstant, og lik $\frac{dT}{dz} = \frac{T_V - T_k}{l}$. Varmestrømmen gjennom kopperstaven blir da

$$\dot{Q}_{Cu} = -\kappa \frac{dT}{dz} A = -400 \frac{W}{K \cdot m} \cdot \frac{100 K}{0,50 m} \cdot \pi (10 \cdot 10^{-3})^2 m^2 = 25,1 J/s = 1508 J/min.$$

I tillegg overføres varme fra omgivelsene til det kalde reservoaret:

$$|\dot{Q}_{kald}| = G\Delta T = 1,4 W/K \cdot 20 K = 28,0 J/s = 1680 J/min.$$

Total varmemstrøm inn til det kalde reservoaret er 3188 J/min, og denne smelter is:

$$\Delta m = \frac{\dot{Q}}{l_{sm}} = \frac{3188 J/min}{335 kJ/kg} = \underline{\underline{9,5 g/min.}}$$

Varmestrøm fra det varme reservoaret til omgivelser har ingen betydning for svaret i denne del av oppgaven.

b) Temperaturen er konstant i reservoar og omgivelser slik at entropiendring for hvert reservoar ganske enkelt er lik varme (med fortegn) dividert med temperaturen. Det er viktig at fortegnet på entropien er riktig (totalentropien skal øke for denne irreversible prosessen!)

Vi må først finne hvor mye varme det overføres fra varmt reservoar til omgivelsene:

$$|\dot{Q}_{varm}| = G\Delta T = 1,4 W/K \cdot 80 K = 112,0 J/s = 6720 J/min,$$

i tillegg kommer $\dot{Q}_{Cu}$ som går fra det varme reservoaret til det kalde gjennom kopperstaven. Totalt 6720 J + 1508 J = 8228 J. For ett minutt gjelder da:

$$\Delta S_{varm} = \frac{Q}{T_{100}} = \frac{-8228 J}{373 K} = \underline{\underline{-22,06 J/K}}$$

$$\Delta S_{kald} = \frac{Q}{T_0} = \frac{3188 J}{273 K} = \underline{\underline{11,68 J/K}}$$

For den totale (universets) ΔS må vi inkludere kopperstavens og omgivelsenes ΔS . Kopperblokken endrer ikke tilstand (temperaturen er konstant på ethvert punkt), og siden S er en tilstandsfunksjon endres heller ikke S for kopperblokken.

$$\Delta S_{Cu} = 0 J/K$$

$$\Delta S_{omgivelser} = \frac{Q}{T_{20}} = \frac{6720 - 1680 J}{293 K} = 17,20 J/K$$

$$\Delta S_{tot} = \Delta S_{varm} + \Delta S_{kald} + \Delta S_{Cu} + \Delta S_{omgivelser} = (-22,06 + 11,68 + 17,20) J/K = \underline{\underline{6,82 J/K.}}$$

Universets entropi øker for denne irreversible prosessen, som rett og rimelig er.

A.M. 17. aug 2000

(11 oppmeldt til eksamen, 3 møtt)