

SIF4016 Termisk fysikk/Fysikk 4

Løsningsforslag Eksamen 10. august 2002.

Tallsvar som brukes i videre regning er oppgitt med noen flere sifre enn et endelig svar bør oppgis i. Noen flere figurer/grafer enn brukt her i løsningsforslaget vil gjøre seg meget bra.

Oppgave 1.

a) Tilstandslikningen for lufta ved start- og slutttilstand bestemmer V_2 :

$$p_0 V_0 = nRT_0, \quad p_2 V_2 = nRT_0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = V_0 \cdot \frac{p_0}{p_2} = 5,00 \text{ m}^3 \cdot \frac{1}{20} = \underline{\underline{0,25 \text{ m}^3}}.$$

Vi kan også beregne antall mol av gassen (kan få bruk for seinere):

$$n = \frac{p_0 V_0}{RT_0} = \frac{101330 \text{ N/m}^2 \cdot 5,0 \text{ m}^3}{8,31 \cdot 293 \text{ Nm/mol}} = \underline{\underline{208,1 \text{ mol}}}.$$

Vi unngår å innføre trykket p'_2 og bruker derfor adiabatlikningen på form $T_0 V_0^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ for å bestemme T_2 . Dette gir

$$\underline{\underline{T_2}} = T_0 \cdot \left(\frac{V_0}{V_2} \right)^{\gamma-1} = 293 \text{ K} \cdot \left(\frac{5,0}{0,25} \right)^{2/5} = \underline{\underline{971 \text{ K}}}.$$

b) Det er kun under den adiabatiske prosessen det utveksles arbeid. Her er $pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma$, og dermed

$$\begin{aligned} \underline{\underline{W_{ABC}}} &= W_{AB} = \int_{V_0}^{V_2} p dV = \int_{V_0}^{V_2} p_0 V_0^\gamma \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_0 V_0^\gamma}{1-\gamma} \left[V^{1-\gamma} \right]_{V_0}^{V_2} = \frac{p_0 V_0}{1-\gamma} \left[\left(\frac{V_0}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right] \\ &= \frac{101330 \text{ N/m}^2 \cdot 5,0 \text{ m}^2}{-0,40} \left[\left(\frac{5,0}{0,25} \right)^{0,40} - 1 \right] = \underline{\underline{-2,93 \text{ MJ}}} \quad (\text{arbeid utført på systemet}) \end{aligned}$$

Når slutt-temperatur er lik start-temperaturen er den indre energi U for ideell gass uendret. Fra første hovedsetning beregner vi varme tilført systemet:

$$\underline{\underline{Q_{ABC}}} = W_{ABC} = -2,93 \text{ MJ} \quad (\text{varme er trukket ut av systemet}).$$

Alternative løsninger under b):

Man kunne eventuelt beregne $Q_{ABC} = Q_{AB} + Q_{BC}$ fra hver delprosess. Ingen varme tilføres under den adiabatiske kompresjonen AC, og for den isokore prosessen BC er $Q_{BC} = C_V \Delta T$:

$$\underline{\underline{Q_{ABC}}} = 0 + C_V \Delta T = \frac{5}{2} \cdot nR(T_0 - T_2) = \frac{5}{2} \cdot 208 \text{ mol} \cdot 8,31 \cdot (293 - 971) \text{ J/mol} = \underline{\underline{-2,93 \text{ MJ}}}.$$

Hvis man bestemmer Q_{ABC} først kan man som over bruke $\Delta U_{ABC} = Q_{ABC} - W_{ABC} = 0$ og

$$W_{ABC} = Q_{ABC} = \underline{\underline{-2,93 \text{ MJ}}}.$$

c) For den isoterme prosessen viser pV -diagrammet at arbeidet er mindre. Vi finner:

$$\underline{\underline{W_{AC}}} = \int_{V_0}^{V_2} p dV = \int_{V_0}^{V_2} nRT_0 \frac{dV}{V} = nRT_0 \cdot \ln \frac{V_2}{V_0} = 208 \cdot 8,31 \cdot 293 \text{ J} \cdot \ln \frac{0,25}{5,0} = \underline{\underline{-1,52 \text{ MJ}}}$$

d) Arbeid påført maskinen $|W_{AB}|$ er større enn arbeid W_{CA} som maskinen utfører, dvs. netto påført arbeid. Det er derfor en kjølemaskin. Varme Q_{inn} trekkes ut fra omgivelsene (reservoar) til systemet ved temperatur T_0 i CA, og noe større varme $|Q_{\text{ut}}|$ fraktes ut av systemet til omgivelsene i prosess BC ved varierende temperatur $T_2 \rightarrow T_0$.

e) For kjølemaskinen er det nyttige Q_{inn} (varme ut av det "kalde" reservoaret). Det som koster er netto påført arbeid, $W_{AB} + W_{CA}$. Virkningsgraden (oftest kalt kjølefaktor for en kjølemaskin) er da lik

$$\eta = \frac{Q_{\text{inn}}}{|W_{AB} + W_{CA}|}$$

Beregnet tidligere: $W_{AB} = -2,93 \text{ MJ}$ og $W_{CA} = -W_{AC} = 1,52 \text{ MJ}$. For den isoterme prosessen AC er $\Delta U = 0$, slik at

$$Q_{\text{inn}} = Q_{CA} = W_{CA} = 1,52 \text{ MJ}$$

Dermed er

$$\eta = \frac{Q_{\text{inn}}}{|W_{AB} + W_{CA}|} = \frac{1,52}{1,41} = \underline{\underline{1,08}}.$$

Dersom den arbeider som en varmepumpe er den nyttige varmen $|Q_{\text{ut}}|$ som tilføres varme reservoar(er), og virkningsgraden blir

$$\eta = \frac{|Q_{\text{ut}}|}{|W_{AB} + W_{CA}|} = \frac{2,93}{1,41} = \underline{\underline{2,08}}. \quad (\text{svaret aksepteres})$$

Oppgave 2.

a) For en adiabatisk prosess er $dQ = 0$. Antar vi en reversibel prosess fra 1 til 2 er $dQ = TdS$, og følgelig

$$0 \equiv \Delta S_{12} = C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Som altså gir

$$nR \ln \frac{V_2}{V_1} = -C_V \ln \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{nR}{C_V} \ln \frac{V_2}{V_1} = \ln \frac{T_1}{T_2}$$

For ideell gass er

$$C_p - C_V = nR \Rightarrow \frac{nR}{C_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \gamma - 1$$

Dermed er

$$\ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{(\gamma-1)} = \ln \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \underline{\underline{T_1 V_1^{(\gamma-1)} = T_2 V_2^{(\gamma-1)} = \text{konstant.}}}$$

b) Hver gass A og B gjennomgår en volumøkning fra henholdsvis V_A og V_B til $V = V_A + V_B$, der p og T holdes konstant. Da er fra ideell gasslov

$$\frac{p}{kT} = \frac{N_A}{V_A} = \frac{N_B}{V_B} = \frac{N}{V} = \frac{N_A + N_B}{V_A + V_B}$$

og entropiøkning for hver gass er gitt av formelen med konstant temperatur:

$$\Delta S_A = N_A R \ln \frac{V}{V_A} = -N_A R \ln x_A$$

der molbrøken er $x_A = \frac{N_A}{N} = \frac{V_A}{V}$.

Idet de to gassene A og B er ideelle og dermed uavhengig av hverandre er total entropiendring lik sum av entropiendring for hver enkelt av dem:

$$\underline{\underline{\Delta S_{\text{mix}} = \Delta S_A + \Delta S_B = -R \sum_{i=A,B} N_i \ln x_i.}}$$

Oppgave 3.

a) Ved stasjonære forhold må all varme som produseres i det indre fraktes gjennom jordskorpa, derfor blir varmekonduktiviteten $j = \frac{P}{4\pi r^2}$. Varmeledningslikningen

$$j = -\kappa \cdot \frac{dT}{dr}$$

gir dermed

$$t(r) = \frac{dT}{dr} = -\frac{j}{\kappa} = -\frac{P}{\kappa \cdot 4\pi r^2} = -\frac{A}{r^2},$$

med

$$A = \frac{P}{\kappa \cdot 4\pi} = \frac{34 \cdot 10^{12} \text{ W}}{3,4 \text{ W/(K} \cdot \text{m)} \cdot 4\pi} = \underline{\underline{0,796 \cdot 10^{12} \text{ K} \cdot \text{m}}}.$$

b) Middelverdi av $t(r)$ er lik:

$$\begin{aligned}\langle t(r) \rangle &= \int_{R_i}^{R_0} t(r) \frac{dr}{R_0 - R_i} = -\frac{A}{R_0 - R_i} \int_{R_i}^{R_0} \frac{dr}{r^2} = -\frac{A}{R_0 - R_i} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_0} \right) \\ &= -\frac{0,796 \cdot 10^{12} \text{ K} \cdot \text{m}}{300 \text{ km}} \left(\frac{1}{6100 \text{ km}} - \frac{1}{6400 \text{ km}} \right) = \underline{\underline{-20,39 \text{ K/km}}} = \underline{\underline{-2,039 \cdot 10^{-2} \text{ K/m}}}.\end{aligned}$$

c) Midt i jordskorpa er

$$t(R_s) = -\frac{0,796 \cdot 10^{12} \text{ K} \cdot \text{m}}{(6250 \text{ km})^2} = -20,38 \text{ K/km}.$$

Og med antakelsen

$$\frac{T_0 - T_i}{R_0 - R_i} \approx \frac{dT}{dr} \approx t(R_s)$$

får vi

$$T_i = T_0 - t(R_s)(R_0 - R_i) = 280 \text{ K} + 20,38 \text{ K/km} \cdot 300 \text{ km} = 6394 \text{ K} = \underline{\underline{6,39 \cdot 10^3 \text{ K}}}.$$

Oppgave 4.

a) Det oppgitte støttallet

$$dj(v, \theta, \phi) = \frac{n}{4\pi} v f(v) dv \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi,$$

er antall støt pr. sekund og m^2 for partikler med fart i intervallet $\langle v, v+dv \rangle$ og retning innenfor romvinkelen $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$. For å finne støttallet for partikler med fart i intervallet $\langle v, v+dv \rangle$ uansett retning integrerer man over alle retninger mot veggen ($\theta \in [0, \pi/2]$)

$$dj(v) = \frac{n}{4\pi} v f(v) dv \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{n}{4\pi} v f(v) dv \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{n}{4} v f(v) dv}}.$$

Når man videre integrerer over alle hastigheter v får man direkte fra definisjonen av middelverdien av v for en Maxwellfordeling:

$$j = \frac{n}{4} \int_0^\infty v f(v) dv = \underline{\underline{\frac{n}{4} \langle v \rangle}}.$$

b) Antall molekyler som treffer A i tida dt er

$$dN = \frac{n}{4} \langle v \rangle \cdot dt \cdot A = \frac{NA \langle v \rangle}{4V} \cdot dt$$

og dette fører til en trykkreduksjon (fra gassloven $p = \frac{N}{V} kT$)

$$dp = -dN \frac{kT}{V} = -\frac{NA \langle v \rangle}{4V} \cdot \frac{kT}{V} \cdot dt = -p \frac{A \langle v \rangle}{4V} \cdot dt \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{A \langle v \rangle}{4V} \cdot dt$$

Integrasjon fra $p_0(t=0)$ til $p'(t')$ gir

$$\ln \frac{p_0}{p'} = \frac{A \langle v \rangle}{4V} t' \Rightarrow t' = \frac{4V}{A \langle v \rangle} \ln \frac{p_0}{p'} = \underline{\underline{\frac{V}{A} \sqrt{\frac{2\pi m}{kT}} \ln \frac{p_0}{p'}}}.$$

der oppgitt uttrykk for $\langle v \rangle$ på formelark er brukt.

c) Tallverdier, med $m = \frac{0,018 \text{ kg}}{N_A}$ og $kN_A = R$:

$$t' = \frac{1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-2}} \sqrt{\frac{2\pi \cdot 0,018 \text{ kg}}{8,31 \text{ J/K} \cdot 300 \text{ K}}} \cdot \ln \frac{2000}{0,010} = \underline{\underline{0,82 \text{ s}}}.$$

Evt. mellom svar:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \cdot 0,018 \text{ kg}}} = 594 \text{ m/s}.$$

A.Mi. 13. aug. 2002

(15 oppmeldt til eksamen, 9 møtt)