

SIF4016 Termisk fysikk/Fysikk 4

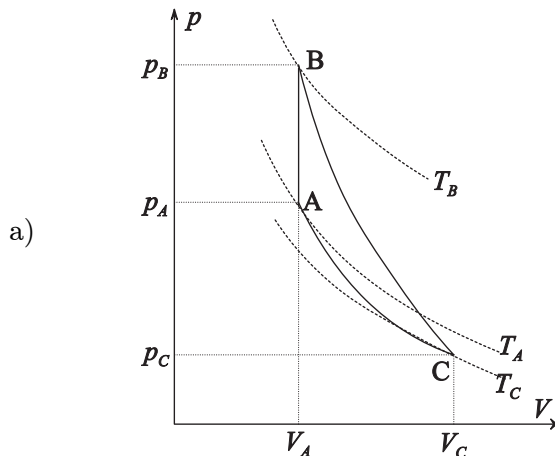
Løsningsforslag Eksamen 20. mai 2003.

Tallsvar er her oppgitt med 1-2 sifre flere enn et endelig svar bør oppgis i.

Noen flere figurer/grafer enn brukt her i løsningsforslaget vil gjøre seg meget bra.

Etter merket * gis alternative løsninger.

Oppgave 1. Termodynamikk.



Enatomig gass har $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5/2}{3/2} = \frac{5}{3}$

Isotemer: $p \propto V^{-1}$, dvs. helning -1

Adiabater: $p \propto V^{-\gamma} = V^{-5/3}$, dvs. helning -1,67

$pV^{5/2} = \text{konstant}$ -prosessen: $p \propto V^{-5/2}$, dvs. helning -2,5

Isotemer har altså lavest helning og er tegnet inn slik.

b)

$$\underline{\underline{N}} = \frac{p_A V_A}{RT_A} = \frac{101,3 \text{ kPa} \cdot 4,0 \text{ dm}^3}{8,314 \cdot 300 \text{ J/mol}} = \underline{\underline{0,1625 \text{ mol}}}$$

c)

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{C_V dT}{T} = \frac{3}{2} R \cdot N \cdot \ln \frac{T_B}{T_A} = \frac{3}{2} \cdot 8,314 \cdot 0,1625 \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot \ln \frac{3}{2} = \underline{\underline{0,822 \frac{\text{J}}{\text{K}}}}$$

For den sykliske, reversible, prosessen er $\Delta S_{\text{tot}} = 0$, for den adiabatisk prosessen CA er $\Delta S_{CA} = 0$, derfor er

$$\Delta S_{BC} = -\Delta S_{AB} = \underline{\underline{-0,822 \frac{\text{J}}{\text{K}}}}$$

* Man kan mer tungvindt også beregne $\Delta S_{BC} = \int_B^C \frac{dQ}{T}$ med $dQ = dU + pdV = \frac{5}{6} NRdT$, som beregnet i pkt. g).

d) For adiabatan AC har vi $p_C V_C^\gamma = p_A V_A^\gamma$ og for prosessen BC har vi $p_C V_C^{5/2} = p_B V_B^{5/2}$. Sammen gir dette

$$\frac{V_C^\gamma}{V_C^{5/2}} = \frac{p_A}{p_B} \cdot (V_A)^{\gamma-5/2}$$

som gir

$$V_C = V_A \cdot \left(\frac{p_A}{p_B} \right)^{\frac{1}{\gamma-5/2}} = V_A \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{-\frac{6}{5}} = V_A \cdot 1,6267 = \underline{\underline{6,507 \text{ dm}^3}}$$

Da er

$$p_C = p_A \left(\frac{V_A}{V_C} \right)^\gamma = p_A \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{6}{5} \gamma} = p_A \left(\frac{2}{3} \right)^2 = p_A \cdot 0,4444 = \underline{\underline{0,4444 \text{ atm}}}$$

og

$$T_C = \frac{p_C V_C}{NR} = \frac{0,4444 \cdot 101,3 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot 6,507 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{0,1625 \cdot 8,314 \text{ Nm/K}} = \underline{\underline{217 \text{ K}}}$$

* eller

$$T_C = \frac{p_C V_C}{NR} = \frac{p_A \left(\frac{2}{3} \right)^2 V_A \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{-\frac{6}{5}}}{NR} = T_A \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{4}{5}} = T_A \cdot 0,723 = \underline{\underline{217 \text{ K}}}$$

e) I BC der $pV^{5/2} = p_C V_C^{5/2} = p_B V_B^{5/2}$ får vi

$$\begin{aligned} W_{BC} &= \int_B^C p dV = \int_B^C p_B \left(\frac{V_B}{V} \right)^{5/2} dV = p_B V_B^{5/2} \left[-\frac{2}{3} V^{-3/2} \right]_B^C = p_B V_B^{5/2} \cdot \frac{2}{3} (V_B^{-3/2} - V_C^{-3/2}) \\ &= \frac{2}{3} p_B V_B - \frac{2}{3} p_C V_C = \frac{2}{3} nR (T_B - T_C) = \frac{2}{3} 0,1625 \cdot 8,314 \text{ J/K} \cdot (450 - 217) \text{ K} = \underline{\underline{209,9 \text{ J}}} \end{aligned}$$

* Kontroll: Med $dQ = \frac{5}{6} nRdT$ fra pkt. g) blir med 1.hovedsetning:

$$W_{BC} = Q_{BC} - \Delta U_{BC} = \frac{5}{6} nRdT - \frac{3}{2} nRdT = -\frac{2}{3} nR(T_C - T_B) \text{ som over.}$$

f)

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{inn}}} = \frac{W_{BC} + W_{CA}}{Q_{AB}}$$

I BC går varme ut. W_{BC} er funnet over. For adiabatene CA og isokoren AB finner vi

$$\begin{aligned} W_{CA} &= -C_V(T_A - T_C) = -\frac{3}{2} \cdot n \cdot R(T_A - T_C) = -\frac{3}{2} \cdot 0,1625 \cdot 8,314 \text{ J/K} \cdot (300 - 217) \text{ K} = -168,2 \text{ J} \\ Q_{AB} &= C_V \cdot (T_B - T_A) = \frac{3}{2} \cdot n \cdot R(T_B - T_A) = \frac{3}{2} \cdot 0,1625 \cdot 8,314 \text{ J/K} \cdot (450 - 300) \text{ K} = 304,0 \text{ J} \\ \eta &= \frac{209,9 - 168,2}{304,0} = \frac{41,70}{304,0} = 0,137. \end{aligned}$$

* Med de foreslåtte 'reserveverdiene' fås: $\eta = \frac{216 - 182,4}{304,0} = \underline{\underline{0,111}}$.

g) Varmekapasiteten for en prosess X er definert ved $C_X = (dQ/dT)_X$, der ifølge 1.hovedsetning $dQ = dU + pdV$. Her er $dU = C_V dT = \frac{3}{2} nRdT$ og vi vil også uttrykke pdV med dT :

$$pV = nRT \Rightarrow pdV + Vdp = nRdT ; \quad pV^{5/2} = \text{konst.} \Rightarrow Vdp = -\frac{5}{2} pdV.$$

som sammen gir $pdV = -\frac{2}{3} nRdT$. Da blir $dQ = C_V dT + pdV = \frac{3}{2} nRdT - \frac{2}{3} nRdT = \frac{5}{6} nRdT$

Slik at under prosessen BC er varmekapasiteten

$$C_{BC} = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_{BC} = \frac{5}{6} nR, \quad \text{dvs. } x = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}.$$

* Eller utregnet mer konkret ved 1.h.setn, $\Delta U = C_V \Delta T$ og W_{BC} fra e):

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} + W_{BC} = \frac{3}{2} nR(T_C - T_B) + \frac{2}{3} nR(T_B - T_C) = \frac{5}{6} nR(T_C - T_B), \text{ med svar som over.}$$

* Eller med konkrete tallverdier, idet $Q_{BC} = \Delta U_{BC} + W_{BC} = -472,2 + 209,9 \text{ J} = -262,3 \text{ J}$:

$$C_{BC} = \frac{Q_{BC}}{T_C - T_B} = \frac{-262,3 \text{ J}}{(217 - 450) \text{ K}} = 1,126 \text{ J/K} = 0,833 \cdot nR.$$

Oppgave 2. Varmedledning.

a) Det indre av tømmerveggene skal varmes opp til $+20^\circ\text{C}$ mens det ytterste laget beholder utetemperatur. Vi kan i beregningene bruke at veggen varmes til middeltemperaturen $+5^\circ\text{C}$ (278 K), dvs. $\Delta T = +15 \text{ K}$. Volum av tømmerveggene beregnes enklest fra:

$$V_{\text{tøm}} = V_{\text{yt}} - V_{\text{indre}} = 8,4 \text{ m} \cdot 5,4 \text{ m} \cdot 2,9 \text{ m} - 8,0 \text{ m} \cdot 5,0 \text{ m} \cdot 2,5 \text{ m} = 131,54 \text{ m}^3 - 100 \text{ m}^3 = 31,54 \text{ m}^3,$$

(* alternativt: $A \cdot d_{\text{tøm}} \approx 158 \text{ m}^2 \cdot 0,20 \text{ m} = 31,60 \text{ m}^3$) slik at det kreves varme

$$Q = c_g V_{\text{tøm}} \cdot \Delta T = 1,35 \frac{\text{MJ}}{\text{m}^3\text{K}} \cdot 31,54 \text{ m}^3 \cdot 15 \text{ K} = \underline{\underline{638,7 \text{ MJ}}}.$$

Tid for å heve innetemperaturen (dvs. varme opp tømmer) blir da

$$\Delta t = \frac{638,7 \text{ MJ}}{7,0 \text{ kJ/s}} = 91,24 \cdot 10^3 \text{ s} = 25,34 \text{ timer} = \underline{\underline{25 \text{ timer } 20 \text{ min}}}.$$

b) Når innerpanelet skal varmes opp til innetemperatur er $\Delta T_{\text{indre}} = 30 \text{ K}$ mens ytterpanelet holder utetemperatur og ikke skal varmes opp. Volumet av den 2,5 cm tykke indre panel er

$$V_{\text{indre}} = 8,05 \cdot 5,05 \cdot 2,55 \text{ m}^3 - 100 \text{ m}^3 = 3,664 \text{ m}^3. \quad (A \cdot d_{\text{indre}} \approx 158 \text{ m}^2 \cdot 0,025 \text{ m} = 3,95 \text{ m}^3 \text{ godtas også})$$

Steinulla skal varmes til middeltemperaturen $+5\text{ }^{\circ}\text{C}$ (278 K) slik at $\Delta T_s = 15\text{ K}$. Volumet av steinulla er

$$V_s = 8,35 \cdot 5,35 \cdot 2,85\text{ m}^3 - 8,05 \cdot 5,05 \cdot 2,55\text{ m}^3 = 23,653\text{ m}^3. \quad (158\text{ m}^2 \cdot 0,15\text{ m} = 23,70\text{ m}^3 \text{ er OK.})$$

Dette krever varme:

$$\begin{aligned} Q &= c_g V_{\text{indre}} \cdot \Delta T_{\text{indre}} + c_s V_s \cdot \Delta T_s \\ &= 1350\text{ kJ m}^{-3}\text{K}^{-1} \cdot 3,664\text{ m}^3 \cdot 30\text{ K} + 26,5\text{ kJ m}^{-3}\text{K}^{-1} \cdot 23,653\text{ m}^3 \cdot 15\text{ K} \\ &= 148,4\text{ MJ} + 9,4\text{ MJ} = \underline{157,8\text{ MJ}}, \end{aligned}$$

som krever oppvarmingstid

$$\Delta t = \frac{157,8\text{ MJ}}{7,0\text{ kJ/s}} = 22,54 \cdot 10^3\text{ s} = 6,26\text{ timer} = \underline{\underline{6\text{ timer } 15\text{ min.}}}$$

c) For hytta med massive tømmervegger vil vi få

$$K_{\text{tøm}} = \frac{\kappa_g}{d_{\text{tøm}}} = \frac{0,14\text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}}{0,20\text{ m}} = \underline{\underline{0,700\text{ } \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}}}$$

slik at varmestrøm som ovnen må kompensere for er da lik

$$|\dot{Q}| = K_{\text{tøm}} \cdot A \cdot \Delta T = 0,700\text{ } \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \cdot 158\text{ m}^2 \cdot 30\text{ K} = \underline{\underline{3,32\text{ kW}}}.$$

d) For isolasjonshytta med vegger med de tre lagene gran/steinull/gran med tykkelser henholdsvis d_{indre}, d_s og d_{ytre} og varmeoverføringskoeffisienter henholdsvis K_{indre}, K_s og K_{ytre} , der

$$K_{\text{ytre}} = K_{\text{indre}} = \frac{\kappa_g}{d_{\text{indre}}} = \frac{0,14\text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}}{0,025\text{ m}} = 5,600\text{ } \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

og

$$K_s = \frac{\kappa_s}{d_s} = \frac{0,047\text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}}{0,15\text{ m}} = 0,3133\text{ } \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}.$$

K_{tot} bestemmes fra at varmestrømtettheten j gitt ved Fouriers lov er lik gjennom alle lag av veggen:

$$-j = K_{\text{indre}} \cdot (T_{\text{inne}} - T_1) = K_s \cdot (T_1 - T_2) = K_{\text{ytre}} \cdot (T_2 - T_{\text{ute}})$$

der T_i er temperaturer på tilhørende veggflater. Dette gir

$$\begin{aligned} T_{\text{inne}} - T_1 &= -j \frac{1}{K_{\text{indre}}} \\ T_1 - T_2 &= -j \frac{1}{K_s} \\ T_2 - T_{\text{ute}} &= -j \frac{1}{K_{\text{ytre}}} \end{aligned} \tag{1}$$

og sum av likningene gir

$$T_{\text{inne}} - T_{\text{ute}} = -j \left(\frac{1}{K_{\text{indre}}} + \frac{1}{K_s} + \frac{1}{K_{\text{ytre}}} \right)$$

og da $K_{\text{ytre}} = K_{\text{indre}}$ får vi ifølge definisjonen av K

$$K_{\text{tot}} = \left(2 \cdot \frac{1}{K_{\text{indre}}} + \frac{1}{K_s} \right)^{-1} = \left(\frac{2}{5,600} + \frac{1}{0,3233} \right)^{-1} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} = \underline{\underline{0,282\text{ } \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}}},$$

Varmestrøm som ovnen må kompensere for er da lik

$$|\dot{Q}| = K_{\text{tot}} \cdot A \cdot \Delta T = 0,282\text{ } \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \cdot 158\text{ m}^2 \cdot 30\text{ K} = \underline{\underline{1,34\text{ kW}}}.$$

* og da kan temp.fall over hvert panel beregnes til $\Delta T_g = \frac{|\dot{Q}|}{K_{\text{indre}} \cdot A} = \frac{1,34 \cdot 10^3}{5,6 \cdot 158}\text{ K} = 1,5\text{ K}$.

Oppgave 3. Diverse.

a) Velger sykklisk relasjon der $\mu_J = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_U$ inngår:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_U \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial U} \right)_T = -1$$

$$\mu_J = \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_U = - \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T}{\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V} = - \frac{T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p}{C_V},$$

der $\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T$ er funnet fra formelliste og $\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$ er kjent resultat fra definisjonen av C_V .

b) Hvis $\mu_J \equiv 0$ er

$$T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V - p \equiv 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} \Rightarrow \ln p = \ln T + \ln A(V) \Rightarrow p = T \cdot A(V).$$

For gitt volum er A konstant og trykket må være proporsjonalt med temperaturen.

Hvis $\mu_{JT} \equiv 0$ er

$$T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p - V \equiv 0 \Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} \Rightarrow \ln V = \ln T + \ln B(p) \Rightarrow V = T \cdot B(p),$$

For gitt trykk er B konstant og volumet må være proporsjonalt med temperaturen.

Hvis begge koeffisientene er lik null må begge betingelsene over være oppfylt og følgelig må $p \cdot V$ være proporsjonal med temperaturen. Det er kun ideell gass som oppfyller dette kravet.

* Begrunnelsen kan gjøres matematisk mer elegant. De to betingelsene gir: $T = \frac{p}{A(V)} = \frac{V}{B(p)}$, dvs. $B(p) \cdot p = A(V) \cdot V$. Siden venstre side kun avhengig av p og høyre side kun avhengig av V må dette være lik en konstant, kalt D , slik at $A(V) = D/V$ innsatt i $T = \frac{p}{A(V)}$ gir tilstandslikningen $p \cdot V = D \cdot T$.

* Alternativt kan man finne fra syklisk relasjon at $\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = - \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V / \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -p/V$, slik at vi får en diff.likning

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T dV = \frac{p}{T} dT - \frac{p}{V} dV \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} - \frac{dV}{V} \Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = \ln \frac{T}{T_0} + \ln \frac{V_0}{V}$$

dvs. $p = \text{konst} \cdot T/V$, som igjen er ideell gasslov.

OBS: Henvisning til at ideell gass oppfyller begge kravene er ikke fullgod løsning, da det spørres etter krav til tilstandslikningen og altså at *kun* ideell gass oppfyller kravene.

c) Molvekter: KCl: $(39,1 + 35,5) \text{ g/mol} = 74,6 \text{ g/mol}$. NaCl: $(23,0 + 35,5) \text{ g/mol} = 58,5 \text{ g/mol}$.

Antall mol fra KCl: $N_{K^+} = N_{Cl^-} = 100 \text{ g} / 74,6 \text{ g/mol} = 1,341 \text{ mol}$, som gir mol partikler fra KCl: $N_{KCl} = N_{K^+} + N_{Cl^-} = \underline{2,682 \text{ mol}}$.

Antall mol fra NaCl: $N_{Na^+} = N_{Cl^-} = 100 \text{ g} / 58,5 \text{ g/mol} = 1,709 \text{ mol}$, som gir mol partikler fra NaCl: $N_{NaCl} = N_{Na^+} + N_{Cl^-} = \underline{3,418 \text{ mol}}$.

Da blir ifølge van't Hoffs lov for osmotisk trykk (oppgitt):

$$\Delta p = \Delta p_{NaCl} - \Delta p_{KCl} = \frac{RT}{V} \cdot (N_{NaCl} - N_{KCl})$$

Vannmengden blir følgelig:

$$V = \frac{RT}{\Delta p} \cdot (N_{NaCl} - N_{KCl}) = \frac{8,314 \cdot 293 \text{ Nm/mol}}{3,00 \cdot 101,3 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2} \cdot 0,736 \text{ mol} = \underline{\underline{5,90 \text{ dm}^3}}.$$

Karakterstatistikk:

A	B	C	D	E	F	Totalt	Middel (uten blanke) C	Middel *) (uten blanke) 2,7
17	17	17	13	17	11	92		

*) Middel tallekvivalent basert på : A=5, B=4, C=3, D=2, E=1, F=0

Middelkarakter for de ulike oppgavene:

1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c
B	A	B	B	C	D	F	D	E	B	E	A	E	D