

SIF4016 Termisk fysikk/Fysikk 4

Løsningsforslag Kont.eksamen 5. august 2003.

Tallsvar er her oppgitt med 1-2 sifre enn et endelig svar bør oppgis i. Noen flere figurer/grafer enn brukt her i løsningsforslaget vil gjøre seg meget bra.

Oppgave 1. Termodynamikk.

a) Antall mol fra ideell gasslov:

$$N_A = N_B \equiv N = \frac{p_{A,0} V_{A,0}}{RT_{A,0}} = \frac{101300 \text{ N/m}^2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{8,314 \text{ J/(K mol)} \cdot 273 \text{ K}} = \underline{\underline{2,232 \text{ mol}}}$$

b) Bestemmer først sluttvolumet i B fra adiabatlikningen. For enatomig gass er $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5/2}{3/2} = \frac{5}{3}$.

$$p_B V_B^\gamma = p_{B,0} V_{B,0}^\gamma \Rightarrow V_B = V_{B,0} \cdot \left(\frac{p_{B,0}}{p_B} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_{B,0} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{3}{5}} = V_{B,0} \cdot 0,5173 = \underline{\underline{2,586 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}}$$

$$V_A = (V_{A,0} + V_{B,0}) - V_B = 2 \cdot 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 - 2,586 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = \underline{\underline{7,414 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}}$$

c) Temperaturene bestemmes enklest fra ideell gasslov:

$$T_A = \frac{p_A V_A}{NR} = \frac{3 \cdot 101300 \text{ N/m}^2 \cdot 7,414 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{2,232 \text{ mol} \cdot 8,314 \text{ J/(K mol)}} = \underline{\underline{1214 \text{ K}}}.$$

$$T_B = \frac{p_B V_B}{N_B R} = \frac{3 \cdot 101300 \text{ N/m}^2 \cdot 2,586 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3}{2,232 \text{ mol} \cdot 8,314 \text{ J/(K mol)}} = \underline{\underline{423,5 \text{ K}}}.$$

d) Betrakt totalsystemet A+B, dette gjør intet ytre arbeid da totalvolumet er konstant. Ved bruk av 1.lov på totalsystemet får vi da:

$$dQ = dU_{\text{tot}} + dW_{\text{tot}} = dU_A + dU_B + 0$$

For monoatomær ideell gass er $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2}NR$ slik at $dU = C_V dT$. Dermed er

$$Q = C_{V,A}(T_A - T_{A,0}) + C_{V,B}(T_B - T_{B,0}) = \frac{3}{2}NR(T_A - T_{A,0}) + \frac{3}{2}NR(T_B - T_{B,0})$$

Og idet $T_{A,0} = T_{B,0} = 273 \text{ K}$, får vi

$$Q = \frac{3}{2}NR(T_A + T_B - 2 \cdot T_{A,0}) = \frac{3}{2} 2,232 \text{ mol} \cdot 8,314 \text{ J/(K mol)} \cdot (1214 + 423,5 - 2 \cdot 273) \text{ K} = \underline{\underline{30,38 \text{ kJ}}}.$$

Kunne også betraktet system A: $Q = Q_A = \Delta U_A + W_A$. Men W_A er litt ekkel å beregne men finnes enklest fra: $W_A = -W_B = \Delta U_B$ (fordi adiabatisk prosess i B), og vi ender opp med samme likningen som over.

e) Prosessen i B er reversibel og adiabatisk, da er

$$\underline{\underline{\Delta S_B = 0}}$$

Entropien S er en tilstandsfunksjon, slik at vi kan beregne ΔS_A f.eks. via en alternativ isobar + isokor prosess. Vi lar 0=starttilstand $(p_{A,0}, V_{A,0})$, 1=slutttilstand (p_A, V_A) og 2=tilstand med $(p, V) = (p_{A,0}, V_A)$, slik at 0-2 er en isobar prosess og 2-1 er en isokor prosess. Temperaturen i mellomtilstanden er

$$T_2 = \frac{p_{A,0} V_A}{NR} = p_{A,0} V_A \cdot \frac{T_{A,0}}{p_{A,0} V_{A,0}} = T_{A,0} \cdot \frac{V_A}{V_{A,0}}$$

Da er

$$\Delta S_A = \int_0^2 \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = \int_0^1 \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} + \int_1^2 \frac{dQ_{\text{rev}}}{T} = \int_0^1 \frac{C_p dT}{T} + \int_1^2 \frac{C_v dT}{T} = C_p \ln \frac{T_2}{T_{A,0}} + C_v \ln \frac{T_A}{T_2}$$

Nå er $C_p = C_V + nR$:

$$\Delta S_A = nR \ln \frac{T_2}{T_{A,0}} + C_V \ln \left(\frac{T_2}{T_{A,0}} \cdot \frac{T_A}{T_2} \right) = nR \ln \frac{V_A}{V_{A,0}} + C_V \ln \frac{T_A}{T_{A,0}}$$

Tallverdier:

$$\Delta S_A = 2,23 \text{ mol} \cdot 8,314 \text{ J/(K mol)} \cdot \ln 1,483 + \frac{3}{2} \cdot 2,23 \text{ mol} \cdot 8,314 \text{ J/(K mol)} \cdot \ln \frac{1214}{273} = \underline{\underline{48,8 \text{ J/K}}}$$

Hvis man skulle huske følgende formel for ideell gass (formelen er ikke oppgitt):

$$\Delta S_{12} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} + C_V \ln \frac{T_2}{T_1}$$

vil man få samme svaret:

$$\Delta S_A = nR \ln \frac{V_A}{V_{A,0}} + C_V \ln \frac{T_A}{T_{A,0}}$$

Oppgave 2. Varmedledning.

a) Lufta som skal varmes opp innenfor volumet $V = 8,0 \text{ m} \cdot 5,0 \text{ m} \cdot 2,5 \text{ m} = 100 \text{ m}^3$ utgjør ved $T = 263 \text{ K}$ antall mol:

$$n_{\text{luft},0} = \frac{p_0 \cdot V}{RT} = \frac{101300 \text{ N/m}^2 \cdot 100 \text{ m}^3}{8,314 \text{ J/(K mol)} \cdot 263 \text{ K}} = 4633 \text{ mol}$$

Nå vil noe av lufta presses ut av hytta når den varmes opp under konstant trykk. Hvis vi ser bort fra lekkasjen får vi:

$$Q_{\text{luft}} = c_p \cdot n_{\text{luft},0} \cdot \Delta T = 29,1 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot 4633 \text{ mol} \cdot 30 \text{ K} = 4,05 \text{ MJ}.$$

(Dersom man regner mer nøyaktig vil man finne $Q_{\text{luft}} = 3,83 \text{ MJ}$. Vi ser i det følgende at luftoppvarmingen er liten i forhold til oppvarming av tømmer, og godtar tilnærmet svar).

Det indre av tømmerveggene skal varmes opp til $+20^\circ\text{C}$ mens det ytterste laget beholder utetemperatur. Vi kan i beregningene bruke at veggen varmes til middeltemperaturen $+5^\circ\text{C}$ (278 K), dvs. $\Delta T = +15 \text{ K}$. Volum av tømmerveggene beregnes enklest fra:

$$V_{\text{tøm}} = V_{\text{yt}} - V_{\text{indre}} = 8,4 \text{ m} \cdot 5,4 \text{ m} \cdot 2,9 \text{ m} - 100 \text{ m}^3 = 31,54 \text{ m}^3,$$

slik at det kreves varme

$$Q = c_g V_{\text{tøm}} \cdot \Delta T = 1,35 \frac{\text{MJ}}{\text{m}^3\text{K}} \cdot 31,54 \text{ m}^3 \cdot 15 \text{ K} = 638,7 \text{ MJ}.$$

Tid for å varme opp tømmerhytta med luft blir da

$$\Delta t = \frac{642,75 \text{ MJ}}{7,0 \text{ kJ/s}} = 91,82 \cdot 10^3 \text{ s} = 25,51 \text{ timer} = \underline{\underline{25 \text{ timer } 30 \text{ min.}}}$$

b) Når innerpanelet skal varmes opp til innetemperatur er $\Delta T_{\text{indre}} = 30 \text{ K}$ mens ytterpanelet holder utetemperatur og ikke skal varmes opp. Volumet av den $2,5 \text{ cm}$ tykke indre panel er

$$V_{\text{indre}} = 8,05 \cdot 5,05 \cdot 2,55 \text{ m}^3 - 100 \text{ m}^3 = 3,66 \text{ m}^3.$$

Steinulla skal varmes til middeltemperaturen 278 K slik at $\Delta T_s = 15 \text{ K}$, og volumet er

$$V_s = 8,35 \cdot 5,35 \cdot 2,85 \text{ m}^3 - 8,05 \cdot 5,05 \cdot 2,55 \text{ m}^3 = 23,65 \text{ m}^3.$$

Dette gir varme:

$$\begin{aligned} Q &= c_g V_{\text{indre}} \cdot \Delta T_{\text{indre}} + c_s V_s \cdot \Delta T_s \\ &= 1350 \text{ kJ m}^{-3}\text{K}^{-1} \cdot 3,66 \text{ m}^3 \cdot 30 \text{ K} + 26,5 \text{ kJ m}^{-3}\text{K}^{-1} \cdot 23,65 \text{ m}^3 \cdot 15 \text{ K} \\ &= 148,2 \text{ MJ} + 9,4 \text{ MJ} = 157,6 \text{ MJ}. \end{aligned}$$

Med tillegg av oppvarming av lufta, $4,05 \text{ MJ}$, krever dette en oppvarmingstid

$$\Delta t = \frac{161,7 \text{ MJ}}{7,0 \text{ kJ/s}} = 23,09 \cdot 10^3 \text{ s} = 6,42 \text{ timer} = \underline{\underline{6 \text{ timer } 25 \text{ min.}}}$$

c) La tykkelser og varmeoverføringskoeffisienter for de tre lagene gran/steinull/gran være henholdsvis

d_{indre}, d_s og $d_{\text{ytre}} = d_{\text{indre}}$ og K_{indre}, K_s og $K_{\text{ytre}} = K_{\text{indre}}$. Vi beregner først:

$$K_{\text{ytre}} = K_{\text{indre}} = \frac{\kappa_g}{d_{\text{indre}}} = \frac{0,14 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}}{0,025 \text{ m}} = 5,60 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$$

og

$$K_s = \frac{\kappa_s}{d_s} = \frac{0,047 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}}{0,15 \text{ m}} = 0,313 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}.$$

Ifølge oppgitte formler får vi

$$K_{\text{tot}} = \left(2 \cdot \frac{1}{K_{\text{indre}}} + \frac{1}{K_s}\right)^{-1} = \left(2 \cdot \frac{1}{5,60} + \frac{1}{0,313}\right)^{-1} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} = 0,282 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}.$$

Alternativ utregning:

$$K_{\text{tot}} = \left(2 \cdot \frac{1}{K_{\text{indre}}} + \frac{1}{K_s}\right)^{-1} = \left(2 \cdot \frac{d_{\text{indre}}}{\kappa_g} + \frac{d_s}{\kappa_s}\right)^{-1} = \left(2 \cdot \frac{0,025}{0,14} + \frac{0,15}{0,047}\right)^{-1} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} = 0,282 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}.$$

Varmestrømtettheten gjennom ethvert lag er ifølge Fouriers lov:

$$j = -K_{\text{tot}} \cdot \Delta T = -0,282 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \cdot 30 \text{ K} = -8,46 \text{ Wm}^{-2}$$

og varmestrøm gjennom hele veggen, som ovnen må kompensere for, er lik

$$|\dot{Q}| = |j \cdot A| = 8,46 \text{ Wm}^{-2} \cdot 158 \text{ m}^2 = \underline{\underline{1,34 \text{ kW}}}.$$

d) Med denne verdi for j blir temperaturen T_1 i sjiktet mellom innerpanel og steinulla bestemt fra Fouriers lov for indre panel:

$$j = -K_{\text{indre}} \cdot (T_{\text{inne}} - T_1) \Rightarrow T_1 = T_{\text{inne}} + \frac{j}{K_{\text{indre}}} = 293 \text{ K} + \frac{-8,46 \text{ Wm}^{-2}}{5,60 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}} = \underline{\underline{291,5 \text{ K} \quad (18,5^\circ \text{ C})}}.$$

(Dermed får vi et overslag over feilen gjort i b) ved å sette hele innerpanelet til temperatur 20°C .)

Dersom tallverdi $1,00 \text{ kW}$ brukes for ovnseffekten oppnås $|j| = \dot{Q}/A = 6,33 \text{ W/m}^2$ og $T_1 = \underline{\underline{291,9 \text{ K}}}$.

Oppgave 3. Diverse.

a) Adiabatisk prosess og 1.hovedsetning gir for ideell gass

$$\delta Q = dU + p dV = C_V dT + \frac{\mathcal{N}R}{T} dV \equiv 0$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\mathcal{N}R}{C_V} \frac{dV}{V} \Rightarrow \ln \frac{T}{T_0} = \ln \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\frac{\mathcal{N}R}{C_V}} \Rightarrow T \cdot V^{\mathcal{N}R/C_V} = \text{konst} \Rightarrow p \cdot V^{1+\mathcal{N}R/C_V} = \text{konst}$$

der vi i siste overgang har brukt ideell gasslov. For alle ideelle gasser er $C_p - C_V = \mathcal{N}R$, slik at

$$\frac{\mathcal{N}R}{C_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \gamma - 1 \quad \text{og} \quad 1 + \frac{\mathcal{N}R}{C_V} = \gamma.$$

Dermed er adiabatlikningene bevist.

b) Utledningen vil også gjelde for en sammensatt gass hvis vi bruker de totale størrelser:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^* &= \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2, & C_V^* &= C_{V,1} + C_{V,2}, & C_p^* &= C_{p,1} + C_{p,2}, \text{ der} \\ C_{V,1} &= \frac{3}{2}\mathcal{N}_1 R, & C_{V,2} &= \frac{5}{2}\mathcal{N}_2 R, & C_{p,1} &= \frac{5}{2}\mathcal{N}_1 R \text{ og } C_{p,2} = \frac{7}{2}\mathcal{N}_2 R. \end{aligned}$$

Da vil vi få

$$C_p^* - C_V^* = (C_{p,1} + C_{p,2}) - (C_{V,1} + C_{V,2}) = \left(\frac{5}{2}\mathcal{N}_1 R + \frac{7}{2}\mathcal{N}_2 R\right) - \left(\frac{3}{2}\mathcal{N}_1 R + \frac{5}{2}\mathcal{N}_2 R\right) = (\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2)R = \mathcal{N}^* R,$$

slik at vi finner for eksponentene i likningene over

$$\frac{\mathcal{N}^* R}{C_V^*} = \frac{C_p^* - C_V^*}{C_V^*} = \gamma^* - 1 \quad \text{og} \quad 1 + \frac{\mathcal{N}^* R}{C_V^*} = \gamma^*$$

Adiabatkonstanten som vi har brukt er da altså

$$\gamma^* = \frac{C_p^*}{C_V^*} = \frac{C_{p,1} + C_{p,2}}{C_{V,1} + C_{V,2}} = \frac{5N_1 + 7N_2}{3N_1 + 5N_2}.$$

Eksempelvis hvis $N_1 = N_2$ blir $\gamma^* = \frac{5+7}{3+5} = \frac{3}{2}$.

c) Oppgitt formel for kokepunktforhøyelse:

$$\Delta T = \frac{RT_0^2}{l_f} \cdot x_s \quad \Rightarrow \quad x_s = \frac{\Delta T \cdot l_f}{RT_0^2} = \frac{0,25 \cdot 40,7 \text{ kJ/mol}}{8,314 \text{ JK}^{-1}\text{mol}^{-1} \cdot (373 \text{ K})^2} = 8,80 \cdot 10^{-3}.$$

Antall mol H_2O i 1,00 l vann er

$$N_{\text{vann}} = \frac{V \cdot \rho}{M_W} = \frac{1,00 \text{ dm}^3 \cdot 0,958 \text{ kg/dm}^3}{18 \text{ g/mol}} = \frac{1,00 \text{ dm}^3 \cdot 0,958 \text{ kg/dm}^3}{18 \text{ g/mol}} = 53,22 \text{ mol}.$$

Molfraksjonen av oppløst stoff, x_s er pr. def. lik $x_s = \frac{N_s}{N_s + N_{\text{vann}}}$, som gir

$$N_s = \frac{x_s}{1 - x_s} \cdot N_{\text{vann}} = \frac{8,80 \cdot 10^{-3}}{0,9912} \cdot 53,22 \text{ mol} = 0,473,$$

slik at molekylveкта er

$$M_w = \frac{110 \text{ g}}{0,473 \text{ mol}} = \underline{\underline{232 \text{ g/mol}}}.$$

d) Fra oppgitt $dj(v)$ og j finner vi at brøkdelen av partikler som slipper ut med fart mellom v og $v + dv$ er lik

$$\frac{dj}{j} = \frac{n/4 \cdot v f(v) dv}{n/4 \cdot \langle v \rangle} = \frac{v}{\langle v \rangle} f(v) dv \stackrel{\text{def}}{=} f_{\text{ut}}(v) dv$$

der $\langle v \rangle = \left(\frac{4}{\pi b}\right)^{1/2}$ fra formelark og $f_{\text{ut}}(v) = \frac{v}{\langle v \rangle} f(v) = \left(\frac{\pi b}{4}\right)^{1/2} v f(v)$ er fordelingsfunksjonen for unnslippende partikler. Med Maxwellfordelingen $f(v)$ fra formelarket finner vi:

$$\langle v^2 \rangle_{\text{ut}} = \int_0^\infty v^2 f_{\text{ut}}(v) dv = \left(\frac{\pi b}{4}\right)^{1/2} \int_0^\infty v^3 f(v) dv = \left(\frac{\pi b}{4}\right)^{1/2} 4\pi \left(\frac{b}{\pi}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^5 \exp\{-bv^2\} dv.$$

Multiplisering, bruk av oppgitt integral med $k = 5$ og innsetting av $b = \frac{m}{2kT}$ gir

$$\langle E \rangle_{\text{ut}} = \frac{1}{2} m \cdot \langle v^2 \rangle_{\text{ut}} = \frac{1}{2} m \cdot 2b^2 \cdot \frac{1}{b^3} = \frac{m}{b} = \underline{\underline{2kT}}.$$

(Middelenergien er altså $\frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}$ i forhold til Maxwellfordelingen.)

AM. 6.08.2003