

Forslag til løsning.

Oppgave 1

a) For å bestemme p_2 trenger en sammenhengen mellom trykk og temperatur langs en adiabat. For ideell gass har en langs adiabat $pV^\gamma = \text{konst.}$ Volumet V kan elimineres via $pV = RT$. En finner

$$pV^\gamma = p \left(\frac{RT}{p} \right)^\gamma = p^{1-\gamma} T^\gamma R^\gamma = \text{konst}$$

$$p T^{-\alpha} = \text{konst}$$

der $\alpha = \frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{C_p}{C_p - C_v} = \frac{C_p}{R}$ (1 mol)

($C_p = C_v + R$ for ideell gass). En finner så

$$p_1 T_1^{-\alpha} = p_2 T_2^{-\alpha}$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^\alpha, \quad (\alpha = \frac{\gamma}{\gamma-1})$$

og tilsvarende

$$p_2 T_3^{-\alpha} = p_1 T_4^{-\alpha}$$

$$p_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^\alpha T_3^{-\alpha} = p_1 T_4^{-\alpha}$$

$$\frac{T_2}{T_1 T_3} = \frac{1}{T_4}$$

$$T_4 = \frac{T_3 T_1}{T_2}$$

b) Oppvarming og avkjøling skjer ved konstant trykk. Tilført varme blir følgende ②

$$Q_2 = \int dQ = \int_{T_2}^{T_3} C_p dT = C_p (T_3 - T_2)$$

Avgitt varme blir T_2 tilsvarende ($Q_1 < 0$)

$$Q_1 = C_p (T_1 - T_4) = C_p (T_1 - T_1 \frac{T_3}{T_2}) = -C_p \frac{T_1}{T_2} (T_3 - T_2)$$

Virkningsgraden blir følgende

$$\eta = \frac{W}{Q_2} = \frac{Q_2 + Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{C_p \frac{T_1}{T_2} (T_3 - T_2)}{C_p (T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

c) Likevektstemperaturen er $T_0 = T_1$. Endring i entropi blir

$$\Delta S = S_1 - S_4 = C_v \ln(T_1/T_4) + R \ln(V_1/V_4) =$$

$$C_v \ln(T_1/T_4) + R \ln\left(\frac{RT_1}{p_1} \frac{p_1}{RT_4}\right) = C_p \ln(T_1/T_4)$$

Endring i indre energi

$$\Delta U = C_v (T_1 - T_4)$$

Endring i volum ΔV

$$p_1 \Delta V = p_1 (V_1 - V_4) = R (T_1 - T_4)$$

Maksimalt arbeid blir følgende

$$W_{\max} = T_1 \Delta S - \Delta U - p_1 \Delta V = C_p \left[T_4 - T_1 - T_1 \ln \frac{T_4}{T_1} \right]$$

Oppgave 2.

a) I termisk likevekt er trykk, temperatur og kjemiske potensial konstante over systemet.

Ved likevekt mellom væskefase og dampfase må kjemisk potensial eller Gibbs fri energi være den samme i begge fasene. Når temperaturen endres må en da ha

$$dG_v = dG_g$$

$$-S_v dT + V_v dp = -S_g dT + V_g dp$$

$$(S_g - S_v) dT = (V_g - V_v) dp$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{S_g - S_v}{V_g - V_v} = \frac{L}{T(V_g - V_v)}$$

der $L = T(S_g - S_v)$ er fordampingsvarmen.

[L er varme tilført ved konstant temperatur,

$$L = \int dQ = \int T ds = T \int ds = T(S_g - S_v).]$$

b) Med $V_v \ll V_g$ og antagelse om ideell gass finner en

$$V_g - V_v = V_g = \frac{RT}{p}$$

slik at

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{RT^2 p}$$

③

$$L = RT^2 \frac{1}{p} \frac{dp}{dT} = RT^2 \frac{d}{dT} (\ln p)$$

Det gitte uttrykket gir så

$$\ln p = \ln K - \alpha \ln T - \frac{L + \alpha RT}{RT}$$

$$\frac{d}{dT} (\ln p) = -\frac{\alpha}{T} + \frac{L + \alpha RT}{RT^2},$$

som innsett gir

$$L = -\alpha RT + L + \alpha RT = \underline{\underline{L + \alpha R(T_1 - T)}}.$$

c) For damptrykket ved henholdsvis $T_0 = 0^\circ\text{C}$ og $T_1 = 100^\circ\text{C}$ har en

$$\ln p_0 = \ln K - \alpha \ln T_0 - \frac{L + \alpha RT_0}{RT_0}$$

$$\ln p_1 = \ln K - \alpha \ln T_1 - \frac{L + \alpha RT_1}{RT_1}$$

Ved å ta differensen mellom likningene finner en

$$\ln \frac{p_1}{p_0} = -\alpha \ln \frac{T_1}{T_0} - \frac{L}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} \right) - \alpha \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} \right)$$

$$\ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right) - \frac{L}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} \right) = \alpha \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 - \ln \frac{T_1}{T_0} \right)$$

$$\alpha = \frac{\ln \frac{p_1}{p_0} - \frac{L}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} \right)}{\frac{T_1}{T_0} - 1 - \ln \frac{T_1}{T_0}} = \frac{\ln \frac{760}{4,58} - \frac{40,7 \cdot 10^3}{8,314} \left(\frac{1}{273} - \frac{1}{373} \right)}{\frac{373}{273} - 1 - \ln \frac{373}{273}}$$

$$= \underline{\underline{5,6}}$$

④

Oppgave 3.

(5)

a) Ved innsettning i varmeledningslikningen finner en

$$\nabla^2 T = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) (A \ln r + B) =$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{A}{r} = -\frac{A}{r^2} + \frac{A}{r^2} = 0,$$

dvs. likningen er oppfylt.

Grensebetingelsene gir

$$A \ln R_1 + B = T_1$$

$$A \ln R_2 + B = T_2$$

$$A \ln(R_2/R_1) = T_2 - T_1$$

$$A = \frac{T_2 - T_1}{\ln(R_2/R_1)}$$

$$B = T_2 - A \ln R_2 = T_2 - \frac{(T_2 - T_1) \ln R_2}{\ln R_2 - \ln R_1} = \frac{T_1 \ln R_2 - T_2 \ln R_1}{\ln(R_2/R_1)}$$

b) Varmestromtetheten er gitt ved

$$\dot{j} = -K \frac{\partial T}{\partial r} = -K \frac{A}{r}$$

Overflaten til en sylinder med lengde L og radius r er

$$S = 2\pi r L$$

Resulterende varmestrom blir følgelig

$$\dot{Q} = S \dot{j} = 2\pi r L \left(+K \frac{A}{r} \right) = 2\pi K L \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_2/R_1)} =$$

$$2\pi \cdot 0,04 \frac{\text{W}}{\text{mK}} \cdot 0,70 \text{ m} \cdot \frac{(30-20) \text{ K}}{\ln(2/1)} = \underline{\underline{2,54 \text{ W}}} (= 2,5 \text{ W})$$

9) Netto varmestromtethet ved stråling blir

(6)

$$\dot{j}_n = \sigma (T_2^4 - T_0^4)$$

Med liten differens $\Delta T = T_2 - T_0$ kan dette lineariseres

$$T_2^4 = (T_0 + \Delta T)^4 = T_0^4 + 4T_0^3 \Delta T + \dots$$

slik at vi finner

$$\dot{j}_n = 4\sigma T_0^3 \Delta T = \underline{\underline{4\sigma T_0^3 (T_2 - T_0)}}$$

Dvs. $F = 4\sigma T_0^3$.

Ved radien $r = R_2$ må varmestromtetheten til strålingen være lik den i rør slik at $\dot{j} = \dot{j}_n$ eller

$$-K \frac{A}{R_2} = G(T_1 - T_2) = F(T_2 - T_0)$$

$$G T_1 + F T_0 = (G + F) T_2$$

$$T_2 = \frac{G T_1 + F T_0}{G + F} = T_0 + \frac{G}{G + F} (T_1 - T_0)$$

der

$$G = -K \frac{A}{R_2 (T_1 - T_2)} = \underline{\underline{\frac{K}{R_2 \ln(R_2/R_1)}}}$$