

Forslag til løsning.

Oppgave 1.

a) Utført arbeid er gitt ved:

$$W_{ab} = \int_{V_a}^{V_b} p dV = \int_{V_a}^{V_b} \left(\frac{RT_2}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) dV =$$

$$\int_{V_a}^{V_b} \left[RT_2 \ln(V-b) + \frac{a}{V} \right] = RT_2 \ln \left(\frac{V_b-b}{V_a-b} \right) + a \left(\frac{1}{V_b} - \frac{1}{V_a} \right)$$

Den tilførte varme er lik endring i indre energi pluss utført arbeid (1. hovedsetning)

$$Q_{ab} = \Delta U_{ab} + W_{ab} = U_a - U_b + W_{ab} = RT_2 \ln \frac{V_b-b}{V_a-b}$$

(der $U_x = C_V T_2 - \frac{a}{V_x}$ ($x=a, b$))

b) Langs isoterme ab tilføres varmen ved konstant temperatur. Fra $dQ = Tds$ følger dermed ($T=T_2=\text{konst}$)

$$\Delta S_{ab} = \frac{1}{T_2} Q_{ab} = R \ln \frac{V_b-b}{V_a-b}$$

Langs isokoren "da" er $dV=0$. Fra den termodynamiske identitet følger dermed

$$Tds = dU + p dV = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \right] dV$$

$$= C_V dT \quad (dV=0)$$

slik at en finner T_2

$$\Delta S_{da} = \int ds = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C_V}{T} dT = C_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = \frac{5}{2} R \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

c) Langs isokorene er utført arbeid lik 0 da $dV=0$. Langs isoterme cd kan resultatet fra punkt a) benyttes ved å erstatte T_2 med T_1 , og å bytte om V_a og V_b . Arbeidet langs cd blir dermed

$$W_{cd} = RT_1 \ln \frac{V_a-b}{V_b-b} + a \left(\frac{1}{V_b} - \frac{1}{V_a} \right)$$

slik at netto arbeid pr. syklus blir

$$W = W_{ab} + W_{cd} = R(T_2 - T_1) \ln \frac{V_b-b}{V_a-b}$$

Virkningsgraden blir følgende:

$$\eta = \frac{W}{Q_{ab}} = \frac{R(T_2 - T_1) \ln \left(\frac{V_b-b}{V_a-b} \right)}{RT_2 \ln \left(\frac{V_b-b}{V_a-b} \right)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

(dvs. samme virkningsgrad som Carnot-syklusen).
[Alternativt er $Q_{cd} = -Q_{ab} T_1/T_2$ når Q_{ab} fra punkt a) benyttes, og dermed blir $W = Q_{ab} + Q_{cd} = (1 - \frac{T_1}{T_2}) Q_{ab}$ ($\Delta U=0$).]

Oppgave 2.

(3)

a) Termisk likevekt er trykk, temperatur og kjemiske potensial konstante over systemet.

Ved likevekt mellom væskefase og dampfase må kjemisk potensial eller Gibbs fri energi være den samme i begge fasene. Når temperaturen endres må en da ha

$$\begin{aligned} dG_v &= dG_g \\ -S_v dT + V_v dp &= -S_g dT + V_g dp \\ (S_g - S_v) dT &= (V_g - V_v) dp \\ \frac{dp}{dT} &= \frac{S_g - S_v}{V_g - V_v} = \frac{L}{T(V_g - V_v)} \end{aligned}$$

der $L = T(S_g - S_v)$ er fordampingsvarmen.

[L er varme tilført ved konstant temperatur, $L = \int dQ = \int T ds = T \int ds = T(S_g - S_v).$]

b) Med $V_v \ll V_g$ og antagelse om ideell gass finner en

$$\begin{aligned} V_g - V_v &= V_g = \frac{RT}{p} \\ \text{slik at} \quad \frac{dp}{dT} &= \frac{L}{RT^2 p} \end{aligned}$$

$$L = RT^2 \frac{1}{p} \frac{dp}{dT} = RT^2 \frac{d}{dT} (\ln p)$$

Det gitte uttrykket gir så

$$\begin{aligned} \ln p &= \ln K - \alpha \ln T - \frac{L_1 + \alpha RT_1}{RT} \\ \frac{d}{dT} (\ln p) &= -\frac{\alpha}{T} + \frac{L_1 + \alpha RT_1}{RT^2}, \end{aligned}$$

som innsett gir

$$L = -\alpha RT + L_1 + \alpha RT_1 = \underline{L_1 + \alpha R(T_1 - T)}.$$

c) For damptrykket ved henholdsvis $T_0 = 0^\circ\text{C}$ og $T_1 = 100^\circ\text{C}$ har en

$$\begin{aligned} \ln p_0 &= \ln K - \alpha \ln T_0 - \frac{L_1 + \alpha RT_1}{RT_0} \\ \ln p_1 &= \ln K - \alpha \ln T_1 - \frac{L_1 + \alpha RT_1}{RT_1} \end{aligned}$$

Ved å ta differensen mellom likningene finner en

$$\ln \frac{p_1}{p_0} = -\alpha \ln \frac{T_1}{T_0} - \frac{L_1}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} \right) - \alpha \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} \right)$$

$$\ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right) - \frac{L_1}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} \right) = \alpha \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 - \ln \frac{T_1}{T_0} \right)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\ln \frac{p_1}{p_0} - \frac{L_1}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} \right)}{\frac{T_1}{T_0} - 1 - \ln \frac{T_1}{T_0}} = \frac{\ln \frac{760}{4,58} - \frac{40,710^3}{8,314} \left(\frac{1}{273} - \frac{1}{373} \right)}{\frac{373}{273} - 1 - \ln \frac{373}{273}} \\ &= \underline{5,6} \end{aligned}$$

(4)

Oppgave 3

(5)

a) Volumet av termosen er $V = \frac{4\pi}{3} R^3$ slik at radien blir

$$R = \left(\frac{3}{4\pi} V\right)^{1/3} = \left(\frac{3}{4\pi} 0,5 \text{ dm}^3\right)^{1/3} = \underline{0,492 \text{ dm}}$$

Overflaten til kulen er dermed

$$A = 4\pi R^2 = \underline{3,05 \text{ dm}^2}$$

Netto utstrålt effekt mellom lagene blir så

$$P = A(\bar{j}_{T+\Delta T} - \bar{j}_T) = A\sigma[(T+\Delta T)^4 - T^4] \\ = \underline{4A\sigma T^3 \Delta T + \dots}$$

For å bestemme hvor raskt temperaturen endrer seg når effekten er P , trenger en så varmekapasiteten til vannet i flasken. Denne er

$$C = C_p \cdot m = 4,185 \text{ J/gK} \cdot 500 \text{ g} = \underline{2,09 \cdot 10^3 \text{ J/K}}$$

Augitt effekt vil nå være

$$-C \frac{dT}{dt} \quad (> 0)$$

Denne effekten er igjen lik den utstrålte effekten P slik at vi får likningen ($\Delta T = T - T_0$)

$$-C \frac{dT}{dt} = -C \frac{d(\Delta T)}{dt} = P = 4A\sigma T^3 \Delta T$$

(6)

$$\text{eller } \frac{d(\Delta T)}{dt} = -\frac{1}{\tau} \Delta T$$

Denne likningen har løsningen

$$\Delta T = \Delta T_0 e^{-t/\tau}$$

Decay-tiden er følgende

$$\tau = \frac{C}{4A\sigma T^3} = \frac{2,09 \cdot 10^3 \text{ J/K}}{4 \cdot 3,05 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4 (293 \text{ K})^3} \\ = \underline{1,20 \cdot 10^4 \text{ s}} = \underline{3 \frac{1}{3} \text{ time}}$$

b) Varmestrømmen gjennom korklaget er gitt ved

$$P_k = A j = A K \left| \frac{\partial T}{\partial r} \right| = A K \frac{\Delta T}{d}$$

Når $P_k = P$ finner en de følgende

$$A K \frac{\Delta T}{d} = 4A\sigma T^3 \Delta T$$

som gir for tykkelsen av korklaget

$$d = \frac{K}{4\sigma T^3} = \frac{0,040 \text{ W/mK}}{4 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4 (293 \text{ K})^3} = \underline{70 \text{ mm.}}$$