

Forslag til løsning.

①

Oppgave 1.

a) For adiabatene fram til V_1 finner en først

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1}$$

$$V_1 = \underline{\underline{V_0 (T_0/T_1)^{1/(\gamma-1)}}}$$

Ved temperaturene T_1 og T_2 er trykket det samme slik at $pV = RT$ gir

$$p/R = V_1/T_1 = V_2/T_2$$

$$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1} = \underline{\underline{V_0 \frac{T_2}{T_1} \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)}}}$$

Adiabatene mellom V_2 og V_3 gir så

$$V_3 = V_2 \left(\frac{T_2}{T_0} \right)^{1/(\gamma-1)} = V_0 \frac{T_2}{T_1} \left(\frac{T_2}{T_0 T_1} \right)^{1/(\gamma-1)} = \underline{\underline{V_0 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^\alpha}}$$

der $\alpha = 1 + 1/(\gamma-1) = \underline{\underline{\gamma/(\gamma-1)}}$.

b) Langs adiabatene tilføres ikke varme, dvs

$$Q_{01} = Q_{23} = \underline{\underline{0.}}$$

Langs isobaren varmes det opp ved konstant trykk, dvs

$$Q_{12} = C_p (T_2 - T_1) = \underline{\underline{\alpha R (T_2 - T_1)}}$$

Langs isotermin er tilført varme lik utført

arbeid da indre energi er uendret for ideell gass ved konstant temperatur. Når resultatet fra punkt a) benyttes blir følgende arbeidet

$$Q_{30} = \int_{V_3}^{V_0} p dV = R T_0 \int_{V_3}^{V_0} \frac{dV}{V} = R T_0 \ln \left(\frac{V_0}{V_3} \right)$$

$$= \underline{\underline{\alpha R T_0 \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right) (< 0)}}$$

c) Utført arbeid W er lik netto tilført varme for en hel syklus ($\Delta U = 0$).

$$W = Q_{12} + Q_{30}.$$

Virkningsgraden blir dermed

$$\eta = \frac{W}{Q_{12}} = 1 + \frac{Q_{30}}{Q_{12}} = \underline{\underline{1 - \frac{T_0 \ln T_2/T_1}{T_2 - T_1}}}$$

For ideell gass avhenger indre energi kun av temperaturen slik at

$$\Delta U_{31} = C_v (T_1 - T_0) = \underline{\underline{\frac{1}{\gamma-1} R (T_1 - T_0)}}.$$

Langs isotermin tilføres varme ved konstant temperatur. Med $dQ = T dS$ blir da

$$\Delta S_{30} = \frac{Q_{30}}{T_0} = \underline{\underline{\alpha R \ln \frac{T_1}{T_2}}}$$

Oppgave 2.

(3)

a) Likevektsbetingelsene for et system i termisk likevekt er at temperatur, trykk og kjemisk potensial er konstante over systemet.

Ved likevekt vil det kjemiske potensialet for oppløsningsmidlet være det samme på begge sider av membranen, dvs.

$$\mu(p + \Delta p, T, x) = \mu^0(p, T).$$

Membranen x av tilsatt stoff antas liten slik at kjemisk potensial for ideell blanding kan benyttes.

$$\mu(p + \Delta p, T, x) = \mu^0(p + \Delta p, T) + kT \ln(1 - x)$$

der μ^0 er kjemisk potensial for rent oppløsningsmiddel. Utvikler nå om trykket p og finner

$$\begin{aligned} \mu^0(p + \Delta p, T) &= \mu^0(p, T) + \Delta p \left(\frac{\partial \mu^0}{\partial p} \right)_T + \dots \\ &= \mu^0(p, T) + v \Delta p + \dots \end{aligned}$$

der v er volum per partikkel

$$v = \left(\frac{\partial \mu^0}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial G^0}{\partial p} \right)_T = V/N.$$

[Har at $\mu^0 = G^0/N$ for rent stoff.]

Ved å sette inn i likevektsbetingelsen ovenfor ser en at $\mu^0(p, T)$ kansellerer og en finner

$$0 = \Delta p v + kT \ln(1 - x) \quad (4)$$

$$\Delta p = -\frac{kT}{v} \ln(1 - x) \approx \frac{kT}{v} x \quad (\text{små } x)$$

Nå er $x = N_x/N = N_A n/N$ der N er det totale antall molekyler, N_x og n en henholdsvis antall molekyler og antall mol oppløst stoff og N_A er Avogadros tall. Videre er så $R = N_A k$ og $V = vN$ er volumet. Resultierende osmotisk trykk blir

$$\Delta p = \frac{kT}{v} \frac{N_A n}{N} = \frac{RT}{V} n.$$

b)

Effekten som tas ut blir

$$P = \Delta p \cdot \Phi = (\Delta p_0 - \Delta p_t) \Phi = (\Delta p_0 - \lambda \Phi) \Phi$$

Maksimal effekt bestemmes ved derivering

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dP}{d\Phi} = \Delta p_0 - 2\lambda \Phi_m \\ \lambda &= \frac{\Delta p_0}{2\Phi_m} \end{aligned}$$

Dette gir

$$P_m = (\Delta p_0 - \frac{\Delta p_0}{2\Phi} \Phi) \Phi = \frac{1}{2} \Delta p_0 \Phi_m.$$

Vannstrømmen ved maksimal effekt blir følgende

$$\Phi_m = \frac{2P_m}{\Delta p_0} = \frac{2 \cdot 85 \cdot 10^3 \text{ J/s}}{21 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2} = 0,081 \text{ m}^3/\text{s} = \underline{\underline{8 \text{ l/dm}^3/\text{s}}}.$$

Oppgave 3.

⑤

a) Ved derivering finner en

$$\nabla^2 T = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{A}{r} + B \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{A}{r^2} \right) - \frac{2A}{r^3} = 0$$

som viser at varmeledningstilningen er oppfylt.
Grensebetingelsene gir likningene

$$\frac{A}{R_1} + B = T_1$$

$$\frac{A}{R_2} + B = T_2$$

som gir

$$A \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = T_1 - T_2$$

$$A = \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} (T_1 - T_2)$$

$$B = T_2 - \frac{A}{R_2} = T_2 - \frac{R_1}{R_2 - R_1} (T_1 - T_2) = \frac{R_2 T_2 - R_1 T_1}{R_2 - R_1}$$

Den radiale varmestromtettheten er gitt ved

$$j = -k \frac{\partial T}{\partial r} = -k \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A}{r} + B \right) = \frac{kA}{r^2}$$

Med kuleareal $S = 4\pi r^2$ blir varmestrommen

$$\dot{Q} = S j = 4\pi r^2 \frac{kA}{r^2} = 4\pi k \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} (T_1 - T_2)$$

Følgelig

$$D = 4\pi k \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

b) Ved å løse uttrykket for D med hensyn på k finner en

$$k = \frac{(R_2 - R_1) D}{4\pi R_1 R_2} = \frac{(0,15 - 0,10) \text{ m} \cdot 0,18 \text{ W/K}}{4\pi \cdot 0,10 \cdot 0,15 \text{ m}^2} = 0,048 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$$

Volum av hulrom

$$V = \frac{4\pi}{3} R_1^3$$

Vekten av isen blir da $M = \rho V$ slik at total smeltevarme blir $Q = M L$. Tiden for å smelte isen blir følgelig

$$t = \frac{Q}{|\dot{Q}|} = \frac{\rho V L}{|\dot{Q}|} = \frac{4\pi \rho R_1^3 L}{3 \cdot D (T_2 - T_1)} =$$

$$\frac{4\pi \cdot 0,92 \text{ kg/dm}^3 \cdot (1,0 \text{ dm})^3 \cdot 333 \text{ kJ/kg}}{3 \cdot 0,18 \text{ W/K} \cdot (20 - 0) \text{ K}} = 3,56 \cdot 10^5 \text{ s} =$$

$$99 \text{ timer} = 4,1 \text{ døgn}$$

c)

Når alle lengder endres med en faktor α endres tiden med en faktor α^2 . Med dette blir tiden for smelting

$$t_\alpha = \alpha^2 t = 1,2^2 t = 5,13 \cdot 10^5 \text{ s} = 142 \text{ timer} = 5,9 \text{ døgn}$$